4. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа постоянной силы.

$A = \left(\vec{F}, \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)\right)$ - работа постоянной силы, приложенной к телу, определяется как скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения тела.

4.1. Под действием постоянной силы величиной 5 Н тело совершает перемещение величиной 2 м. Вычислите работу этой силы, если угол между векторами силы и перемещения равен 60^0.

<u>4.5.</u> Под действием постоянной силы $\vec{F} = 5\vec{k}$ небольшое тело совершает перемещение $\vec{s} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Вычислите работу этой силы.

Работа переменной силы.

Разделяем конечное перемещение $\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$ на такие элементарные перемещения $d\vec{r}$, чтобы на любом из них можно было считать силу постоянной по величине и по направлению. Тогда можно ввести понятие элементарной работы $dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$. Затем учитываем замечательное свойство работы - аддитивность (свойство складываться): $A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$.

4.6. Материальная точка движется вдоль координатной оси X под действием силы, проекция которой F_x находится по формуле $F_x = -100 \cdot x$. . Вычислите работу этой силы на перемещении от точки с координатой x_1=0,1м до точки с координатой x_2=0,3м.

<u>4.7.</u> Известно, что на небольшое тело массы m со стороны Земли массы M и радиуса R действует сила притяжения $G \cdot m \cdot M/x^2$ (причем $x>R$). Здесь x – расстояние от центра Земли до тела. С высоты $H = R$ из состояния покоя падает небольшое тело. Найдите работу силы притяжения на этом пути.

4.8. Тело массой 6,4кг бросили вертикально вверх и оно поднялось на высоту равную радиусу Земли. Вычислите работу силы притяжения, действующей на тело со стороны Земли на этом пути. Гравитационная постоянная, масса Земли и ее радиус равны соответственно $6{,}7 \cdot 10^{-11}$; $6 \cdot 10^{24}$; $6{,}4 \cdot 10^6$.

Мощность силы.

$$N = \frac{dA}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{v}\right)$$

4.9. Небольшое тело движется со скоростью $\vec{v} = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$. под действием силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 4t\vec{j}$. Вычислите мощность этой силы для момента t = 1 с

4.11. Тело массы *m* бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найдите среднюю мощность, развиваемую постоянной силой тяжести за все время движения тела от старта до финиша на стартовом горизонте, и мгновенную мощность этой силы как функцию времени.

Теорема о приращении кинетической энергии.

$$\frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$$

- приращение кинетической энергии материальной точки или поступательно движущегося твердого тела равно работе всех сил, приложенных к материальной точке или к телу.

<u>4.12</u>. Пуля массы 10г, перемещаясь практически горизонтально, пробивает доску. В результате ее скорость, равная в начале 400м/с, уменьшается в два раза. Вычислите работу силы сопротивления, которая действует на пулю в доске.

4.13. Тело массой 5 кг движется под действием сил так, что его скорость увеличивается со временем по закону $v = 3 + 2t$. Вычислите работу суммарной силы, действующей на тело, за первые две секунды после начала движения.

Потенциальная энергия взаимодействия системы материальных точек.

Для того, чтобы работа силы, приложенной к телу, при переносе тела из позиции 1 в позицию 2

$$A(1 \to 2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \int_1^2 \left(F_X \cdot dx + F_Y \cdot dy + F_Z \cdot dz\right)$$

не зависела от формы траектории, необходимо, чтобы сумма

$$F_X \cdot dx + F_Y \cdot dy + F_Z \cdot dz$$

была полным дифференциалом. В свою очередь, для того, чтобы указанная сумма была полным дифференциалом, должны выполняться равенства

$$\frac{\partial F_Y}{\partial x} = \frac{\partial F_X}{\partial y}; \quad \frac{\partial F_Z}{\partial y} = \frac{\partial F_Y}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_X}{\partial z} = \frac{\partial F_Z}{\partial x}.$$

Только при выполнении этих условий можно сопоставить точкам пространства (x, y, z) некоторую функцию координат $U(x, y, z)$ и назвать ее потенциальной энергией, а силу потенциальной или консервативной.

Определение формулируется не для потенциальной энергии, а для ее приращения

$$\Delta U = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F}, d\vec{r}),$$

или ее убыли

$$U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F}, d\vec{r}).$$

Таким образом, потенциальная энергия неопределенна с точностью до постоянной – уровня отсчета потенциальной энергии.

Определение приращения потенциальной энергии в дифференциальной форме имеет вид

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}).$$

Отсюда

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).$$

4.23. Материальная точка движется вдоль координатной оси X под действием силы, проекция которой F_x находится по формуле $F_x = 3 \cdot x^2$. Вычислите приращение потенциальной энергии материальной точки на перемещении от точки с координатой x_1=0м до точки с координатой x_2=2м.

4.24. Известно, что на небольшое тело массы m со стороны Земли массы M и радиуса R действует сила притяжения $G \cdot m \cdot M/x^2$ (причем $x>R$). Здесь x – расстояние от центра Земли до тела. Найдите разность потенциальных энергий взаимодействия тела, массой m и Земли в точках $x = R + H$ и $x = R$.

4.25. В некоторой точке траектории потенциальная энергия взаимодействия материальной точки с внешним полем равна 2 Дж. Можно ли располагая этой информацией найти силу, действующую на материальную точку?

4.26. В двух «близких» точках 1 и 2 потенциальная энергия взаимодействия частицы с внешним полем равна 5 Дж и 6 Дж соответственно. Расстояние между точками равно 1 см. Вычислите проекцию силы на координатную ось X, проходящую через эти точки (от 1 к 2).

4.27. Известно, что потенциальная энергия взаимодействия небольшого тела массы m с Землей массы M и радиуса R вычисляется по формуле $U(r) = -\frac{GmM}{r}$. Здесь используется полярная координатная ось r с началом $r = 0$ в центре Земли. Формула выведена в предположении, что $U(\infty) = 0$. Найдите проекцию F_r силы, действующей на тело со стороны Земли.

Условие равновесия материальной точки, находящейся во внешнем потенциальном силовом поле, сводится к требованию равенства нулю потенциальной силы, действующей на материальную точку. Это значит, что в положении равновесия потенциальная энергия экстремальна, то есть либо минимальна, либо максимальна. Если потенциальная энергия минимальна, то равновесие устойчиво. Если потенциальная энергия максимальна, то равновесие неустойчиво.

4.34. Формула для потенциальной энергии материальной точки в некотором силовом поле имеет вид $U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$. Здесь a и b – положительные постоянные. Найдите значение r, соответствующее равновесному положению материальной точки и выясните, устойчиво ли это положение.

Изменение механической энергии.

Пронумеруем тела, которые входят в состав системы тел. Все силы, действующие на тела системы, разделяем на внешние и внутренние. Внешние действуют на пронумерованные тела со стороны тел не входящих в систему. внутренние – со стороны одних тел системы на другие тела системы. Вводим по определению механическую энергию E системы тел, как сумму кинетических энергий тел системы и потенциальных энергий их взаимодействия друг с другом. Тогда справедливо следующее утверждение:

$$\Delta E = A_{внеш} + A^{дис}_{внутр}$$ -

приращение механической энергии системы тел равно сумме работы внешних сил и работы внутренних диссипативных (неконсервативных, непотенциальных) сил. Это закон (или теорема) изменения механической энергии.

4.35. Тело массы 1кг брошено вверх с начальной скоростью 10 м/с. Высота подъема тела оказалась равной 4 м. Найдите работу силы сопротивления воздуха.

4.36. Тело массы m брошено с начальной скоростью v_0 с башни высоты h. На землю тело упало со скоростью v. Найдите работу силы сопротивления воздуха.

Сохранение механической энергии.

Назовем систему тел изолированной от внешнего мира, если работа внешних сил равна нулю. Назовем систему тел консервативной, если работа внутренних диссипативных сил равна нулю. Тогда можно утверждать, что механическая энергия изолированной и консервативной системы тел сохраняется:

если $A_{внеш} = 0$ и $A^{дис}_{внутр} = 0$, то $\Delta E = 0$ или $E = const$.

4.54. При упругом ударе нейтрона о неподвижное ядро некоторого атома нейтрон двигался после удара в направлении, перпендикулярном первоначальному. В результате кинетическая энергия нейтрона уменьшилась в 2 раза. Найдите, под каким углом α к первоначальному направлению движения нейтрона будет двигаться ядро.

4.55. После упругого столкновения нейтрона с неподвижным ядром атома углерода нейтрон движется в направлении, перпендикулярном первоначальному. Считая, что масса ядра атома углерода в 12 раз больше массы нейтрона, найдите, во сколько k раз уменьшится энергия нейтрона в результате столкновения.

4.56. Частица A массы m, пролетая вблизи другой первоначально покоившейся частицы B, отклоняется на угол α. Импульс частицы A до взаимодействия был $\vec{p}_0$, после взаимодействия стал $\vec{p}$. Найдите массу M частицы B, если система частиц изолирована и отсутствуют диссипативные силы.

4.57. Молекула столкнулась с другой, покоившейся, молекулой той же массы. Угол разлета молекул после столкновения равен 90^0. Как изменилась кинетическая энергия системы молекул?

Собственная кинетическая энергия системы материальных точек.

Собственной кинетической энергией $\tilde{T}$ системы материальных точек называется сумма кинетических энергий материальных точек, вычисленная в системе отсчета центра масс:

$$\tilde{T} = \sum \frac{m\tilde{v}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы материальных точек, вычисленная в лабораторной системе отсчета, может быть представлена в виде суммы собственной кинетической энергии и кинетической энергии системы как целого, движущейся со скоростью центра масс относительно лаборатории:

$$T = \tilde{T} + \frac{\left(\sum m\right)\cdot V^2}{2}$$ - теорема Кенига.

4.58. По гладкой горизонтальной плоскости движутся два одинаковых бруска массой 0,1кг каждый. Величины скоростей брусков в лабораторной системе отсчета равны соответственно 3м/с и 4 м/с, а направления взаимно перпендикулярны. Вычислите собственную кинетическую энергию системы тел.

4.59. Два шарика, массой 100г каждый, движутся относительно лаборатории с одинаковыми по величине скоростями 10м/с. В некоторый момент времени скорость одного из них перпендикулярна прямой, проходящей через шарики, а другого направлена вдоль этой прямой. Вычислите собственную кинетическую энергию системы шариков.

4.60. Два шарика массой 100г каждый движутся относительно лаборатории со скоростями 10м/с и 30 м/с соответственно. В некоторый момент времени скорости шариков перпендикулярны прямой, проходящей через шарики, и направлены в одну сторону. Вычислите собственную кинетическую энергию системы шариков.

4.61. Два шарика массой 100г каждый движутся относительно лаборатории со скоростями 10м/с и 20 м/с соответственно. В некоторый момент времени скорости шариков сонаправлены и лежат на прямой, проходящей через шарики. Вычислите собственную кинетическую энергию системы шариков.

4.62. Два шарика массой 100г каждый движутся относительно лаборатории со скоростями 10м/с и 30 м/с соответственно. В некоторый момент времени скорости шариков перпендикулярны прямой, проходящей через шарики, и направлены в противоположные стороны. Вычислите собственную кинетическую энергию системы шариков.

Ответы

4.1 $A_{.} = 5$ Дж.

4.2 $A_{.} = -1$ Дж.

4.3 $A_{.} = 0$.

4.4 $A_{.} = 0$.

4.5 $A_{.} = 0$.

4.6 $A_{.} = -4$ Дж.

4.7 $A_{.} = \dfrac{GmM}{2R}$.

4.8 $A_{.} = -\dfrac{GmM}{2R} \approx -2 \cdot 10^{8}$ Дж.

4.9 $N_{.} = 17$ Вт.

4.10 $N_{.} = 17$ Вт.

4.11 $\langle N \rangle = 0;$

$N_{.} = mg \cdot (gt - v_0 \cdot \sin\alpha).$

4.12 $A_{.} = -600$ Дж.

4.13 $A_{.} = 1$ кДж.

4.14 $T_{.} = 1$ Дж.

4.15 $A_{.} = -\dfrac{mv_0^2}{2};$

$A'_{.} = \dfrac{mv_0^2}{2}$.

Да, работа силы зависит от системы отсчета.

4.16 $N_{.} = mg \cdot \dfrac{u}{2}.$

4.17 Нет.

4.18 Да.

4.19 Нет.

4.20 $U_{.} = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{m_2 - m_1} \cdot g \cdot (H_1 - H_2) = 1{,}5$ Дж.

4.21 $U(x_1) - U(x_2)_{.} = mg \cdot (x_1 - x_2) = -mgH.$

4.22 $\Delta U_{.} = 4$ Дж.

4.23 $\Delta U_{.} = -8$ Дж.

4.24 $\Delta U_{.} = \dfrac{GmM \cdot H}{(R + H) \cdot R}.$

4.25 Нет.

4.26 $F_{X.} = -100$ Н.

4.27 $F_{r.} = -\dfrac{GmM}{r^2}.$

4.28 $F_{r.} = -\dfrac{GmM}{r^2}.$

4.29 $F_{X.} = A \cdot x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}};$

$F_{Y.} = A \cdot y \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}};$

$F_{Z.} = A \cdot z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.$

4.30 $F_{X.} = 2A \cdot x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1};$

$F_{Y.} = 2A \cdot y \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1};$

$F_{Z.} = 2A \cdot z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}.$

4.31 $\vec{F}_{.} = -(a \cdot x \cdot \vec{i} + b \cdot y \cdot \vec{j} - c \cdot z \cdot \vec{k})$.

4.32 Положение равновесия $r_{.} = 0$ устойчиво.

4.33 Положение равновесия $r_{.} = 0$ неустойчиво.

4.34 Положение равновесия $r_{.} = \dfrac{2a}{b}$ устойчиво.

4.35 $A_{.} = -10$ Дж.

4.36 $A_{.} = -\dfrac{m}{2} \cdot (2gh - (v^2 - v_0^2)).$

4.37 $A_{.} = -\dfrac{m}{2} \cdot (v_0^2 - v^2).$

4.38 $A_{.} = \dfrac{m\omega^2 l_0^2}{2} \cdot \dfrac{\left(1 + \dfrac{m\omega^2}{k}\right)}{\left(1 - \dfrac{m\omega^2}{k}\right)^2}.$

4.39 $\delta T_{.} = -\dfrac{2}{3} \approx -0{,}67.$

4.40 $\delta T_{.} = -\dfrac{5}{6} \approx -0{,}83.$

4.41 Кинетическая энергия системы молекул уменьшилась.

4.42 Кинетическая энергия системы молекул уменьшилась.

4.43 Кинетическая энергия системы молекул увеличилась.

4.44 Кинетическая энергия системы молекул увеличилась.

4.45 Кинетическая энергия системы молекул увеличилась.

4.46 $$\delta T = \frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{1+\frac{m}{M}}.$$

4.47 $U = 15$ Дж.

4.48 $$v = \sqrt{\frac{gH}{3}}.$$

4.49 $$h = \frac{R}{3}\cdot\left(1+2\cdot\frac{H}{R}\right);$$

Здесь $R \le H \le \frac{5}{2}\cdot R$.

4.50 $$k = \frac{99}{2}\cdot\frac{Mg}{h}.$$

4.51 $$v = \frac{1-\frac{m}{M}}{1-\frac{m}{M}}\cdot v_0.$$

4.52 $m_2 = 3\cdot m_1$.

4.53 $$\frac{m_1}{m_2} = 2.$$

4.54 $\alpha = arctg\sqrt{2} \approx 55^0$.

4.55 $$k = \frac{13}{11} \approx 1{,}2.$$

4.56 $$M = \frac{p_0^2 + p^2 - 2p_0 p\cdot\cos\alpha}{p_0^2 - p^2}\cdot m.$$

4.57 Кинетическая энергия системы молекул не изменилась.

4.58 $\tilde{T} = 0{,}625$ Дж.

4.59 $\tilde{T} = 5$ Дж.

4.60 $\tilde{T} = 10$ Дж.

4.61 $\tilde{T} = 2{,}5$ Дж.

4.62 $\tilde{T} = 40$ Дж.