21. Soal UM UGM 2005 Kode 821 | *Soal Lengkap

Jika diberikan fungsi f dengan rumus $f(x) = x\sqrt{x+1}$ maka daerah dengan fungsi f naik adalah...

$(A)\ -1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$

$(B)\ x \leq -1$

$(C)\ -1 \leq x < -\frac{2}{3}$

$(D)\ x > -\frac{2}{3}$

$(E)\ x > \frac{2}{3}$

Alternatif Pembahasan: Hide

Syarat suatu fungsi $f(x)$ akan naik adalah saat $f'(x) > 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\sqrt{x+1} \\
&= x(x+1)^{\frac{1}{2}} \\
\hline
u = x &\rightarrow u' = 1 \\
v = (x+1)^{\frac{1}{2}} &\rightarrow v' = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \\
\hline
f'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' \\
&= (1)\left((x+1)^{\frac{1}{2}}\right) + (x)\left(\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= (x+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \\
&= (x+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{2(x+1)+x}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{3x+2}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
\hline
f'(x) &> 0 \\
\frac{3x+2}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}} &> 0 \\
\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} &> 0
\end{aligned}
$$

Untuk setiap x bilangan real, hasil dari $2\sqrt{x+1}$ adalah bilangan real positif, sehingga agar $\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} > 0$ atau $\frac{3x+2}{(+)} > 0$ maka $3x+2$ harus bilangan real postif. Dapat kita tuliskan $3x+2 > 0$ atau $x > -\frac{2}{3}$.

$\therefore$ Pilihan yang sesuai adalah $(D)\ x > -\frac{2}{3}$

22. Soal SPMB 2004 Regional I | *Soal Lengkap

Fungsi $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ turun untuk nilai x yang memenuhi...

$(A)\ -3<x<1$

$(B)\ -3<x<1 \text{ atau } x>1$

$(C)\ -1<x<1 \text{ atau } 1<x<3$

$(D)\ x<-3 \text{ atau } x>1$

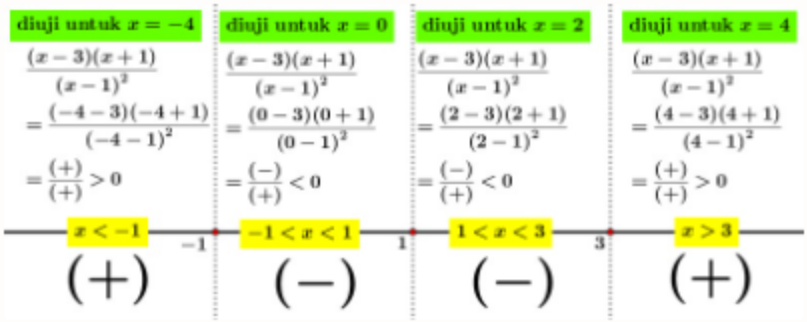
$(E)\ x<-1 \text{ atau } x>4$

Alternatif Pembahasan: Hide

Syarat suatu fungsi $f(x)$ akan turun adalah saat $f'(x)<0$

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x^2+3}{x-1}\\
\hline
u&=x^2+3\rightarrow u'=2x\\
v&=x-1\rightarrow v'=1\\
\hline
f'(x)&=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\\
&=\frac{(2x)\cdot(x-1)-(x^2+3)\cdot(1)}{(x-1)^2}\\
&=\frac{2x^2-2x-x^2-3}{(x-1)^2}\\
&=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\\
&=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}\\
\hline
f'(x)&<0\\
\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}&<0
\end{aligned}
$$

Untuk mendapatkan nilai x yang memenuhi pada pertidaksamaan kita lakukan uji titik dengan batasan nilai x , pembuat nol pada pembilang dan pembuat nol pada penyebut yaitu $x = -1, x = 1$ dan $x = 3$



Dari hasil di atas kita peroleh $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} < 0$ saat $-1 < x < 1$ atau $1 < x < 3$

$\therefore$ Pilihan yang sesuai adalah $(C)\ -1 < x < 1$ atau $1 < x < 3$

23. Soal SPMB 2004 Regional III | *Soal Lengkap

Fungsi $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ turun untuk nilai x yang memenuhi...

$(A)\ x < -2$

$(B)\ -2 < x < \frac{1}{2}$

$(C)\ -2 < x < 2$

$(D)\ x > 2$

$(E)\ -\frac{1}{2} < x < 2$

Alternatif Pembahasan: Hide

Syarat suatu fungsi $f(x)$ akan turun adalah saat $f'(x) < 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - 9x^2 - 12x + 1 \\ f'(x) &= 12x^2 - 18x - 12 \\ \hline f'(x) &< 0 \\ 12x^2 - 18x - 12 &< 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 &< 0 \\ (2x+1)(x-2) &< 0 \end{aligned}$$

diperoleh pembuat nol

$x = -\frac{1}{2}$ atau $x = 2$

Kesimpulan fungsi $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ turun pada interval $-\frac{1}{2} < x < 2$

> ! **Warning!**
> *Jika masih kesulitan menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dengan cepat silahkan disimak caranya: Cara Kreatif Menentukan HP Pertidaksamaan Kuadrat*

∴ Pilihan yang sesuai adalah $(E)\ -\frac{1}{2} < x < 2$

24. Soal SPMB 2006 Kode 310 | *Soal Lengkap

Grafik $y = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + 5$ naik untuk x yang memenuhi...

$(A)\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

$(B)\ -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

$(C)\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

$(D)\ x < -\frac{2}{3} \text{ atau } x > \frac{3}{2}$

$(E)\ x < -\frac{2}{3} \text{ atau } x > \frac{5}{2}$

Alternatif Pembahasan: Hide

Syarat suatu grafik fungsi $f(x)$ akan naik adalah saat $f'(x) > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + 5 \\ f'(x) &= 6x^2 - 5x - 6 \\ \hline f'(x) &> 0 \\ 6x^2 - 5x - 6 &> 0 \\ (2x - 3)(3x + 2) &< 0 \\ \text{diperoleh pembuat nol} & \\ x = \frac{3}{2} \text{ atau } x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Kesimpulan fungsi $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + 5$ naik pada interval $x < -\frac{2}{3} \text{ atau } x > \frac{3}{2}$

! **Warning!**
Jika masih kesulitan menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dengan cepat silahkan disimak caranya: Cara Kreatif Menentukan HP Pertidaksamaan Kuadrat

∴ Pilihan yang sesuai adalah $(D)\ x < -\frac{2}{3} \text{ atau } x > \frac{3}{2}$

25. Soal UNBK Matematika SMA IPS 2019 | *Soal Lengkap

Grafik fungsi $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 5$ naik pada interval...

$(A)\ -2 < x < 3$
$(B)\ -3 < x < 2$
$(C)\ x < 2 \text{ atau } x > 3$
$(D)\ x < -3 \text{ atau } x > 2$
$(E)\ x < -2 \text{ atau } x > 3$

Alternatif Pembahasan: Hide

Untuk menentukan interval nilai x agar fungsi $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 5$ naik kita cukup menentukan interval niLai x yang memenuhi saat $f'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 5 \\ f'(x) &= 3x^{3-1} - 2 \cdot \frac{3}{2}x^{2-1} - 18 \\ f'(x) &= 3x^2 - 3x - 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ 3x^2 - 3x - 18 &> 0 \\ 3(x^2 - x - 6) &> 0 \\ 3(x-3)(x+2) &> 0 \end{aligned}$$

Nilai x yang memenuhi adalah $x < -2 \text{ atau } x > 3$

Jika masih kesulitan menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dengan cepat silahkan disimak caranya: Cara Kreatif Menentukan HP Pertidaksamaan Kuadrat

$\therefore$ Pilihan yang sesuai adalah $(E)\ x < -2 \text{ atau } x > 3$

26. Soal SIMAK UI 2009 Kode 911 | *Soal Lengkap

Jika kurva $y = \left(x^2 - a\right)(2x + b)^3$ turun pada interval $-1 < x < \frac{2}{5}$, maka nilai $ab = \cdots$

$(A)\ -3$
$(B)\ -2$
$(C)\ 1$
$(D)\ 2$
$(E)\ 3$

Alternatif Pembahasan: Hide

Untuk menentukan turunan pertama kita pakai pakai aturan $y = u \cdot v$ maka $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\begin{aligned}
&y = \left(x^2 - a\right)(2x + b)^3 \\
&u = \left(x^2 - a\right) \rightarrow u' = 2x \\
&v = (2x + b)^3 \rightarrow v' = 6(2x + b)^2 \\
&y' = u' \cdot v + u \cdot v' \\
&\quad = (2x) \cdot (2x + b)^3 + \left(x^2 - a\right) \cdot 6(2x + b)^2 \\
&\quad = (2x + b)^2 \left[2x \cdot (2x + b) + 6\left(x^2 - a\right)\right] \\
&\quad = (2x + b)^2 \left(4x^2 + 2bx + 6x^2 - 6a\right) \\
&\quad = (2x + b)^2 \left(10x^2 + 2bx - 6a\right)
\end{aligned}$$

Dikatakan pada soal bahwa kurva turun sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}
y' &< 0 \\
(2x + b)^2 \left(10x^2 + 2bx - 6a\right) &< 0 \\
2(2x + b)^2 \left(5x^2 + bx - 3a\right) &< 0
\end{aligned}$$

Kita ketahui bahwa $2(2x + b)^2 \geq 0$, maka dari pertidaksamaan di atas berlaku $\left(5x^2 + bx - 3a\right) < 0$.

Himpunan penyelesaian dari $\left(5x^2 + bx - 3a\right) < 0$ adalah $-1 < x < \frac{2}{5}$, sehingga berlaku
$x < \frac{2}{5} \rightarrow (5x - 2) < 0$ dan $x < -1 \rightarrow (x + 1) > 0$.

Untuk $(5x - 2) < 0$ dan $(x + 1) > 0$ maka berlaku:

$$\begin{aligned}
(5x - 2)(x + 1) &< 0 \\
5x^2 + 5x - 2x - 2 &< 0 \\
5x^2 + 3x - 2 &< 0 \\
\hline
5x^2 + bx - 3a &< 0 \\
\hline
b = 3 \text{ dan } a &= \frac{2}{3} \\
ab &= \frac{2}{3} \cdot 3 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$\therefore$ Pilihan yang sesuai adalah $(D)\ 2$

27. Soal SBMPTN 2014 Kode 631 | *Soal Lengkap

Syarat agar fungsi $f(x) = -x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 8$ selalu turun untuk semua nilai real x adalah...

$(A)\ a < -5$ atau $a > 7$
$(B)\ a < 0$ atau $a > 4$
$(C)\ -5 < a < 7$
$(D)\ -7 < a < 5$
$(E)\ -7 < a < 0$ atau $4 < a < 7$

Alternatif Pembahasan: Hide

Agar sebuh fungsi $f(x)$ selalu turun maka $f'(x) < 0$

$$f(x) = -x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 8$$
$$f'(x) = -3x^2 + ax - x - 3$$

Agar $f(x)$ turun maka $f'(x) < 0$ dan agar $f(x)$ selalu turun maka $f'(x) = -3x^2 + (a-1)x - 3$ selalu kurang dari nol atau dengan kata lain $f'(x)$ adalah definit negatif. Syarat sebuah fungsi $f(x) = px^2 + qx + r$ definit negatif adalah:

- Koefisien x^2 bernilai negatif atau $p < 0$ sudah memenuhi karena $p = -3$
- Diskriminan $D = b^2 - 4ac$ kurang dari nol,

$$q^2 - 4pr < 0$$
$$(a-1)^2 - 4(-3)(-3) < 0$$
$$a^2 - 2a + 1 - 36 < 0$$
$$a^2 - 2a - 35 < 0$$
$$(a-7)(a+5) < 0$$

Dari pertidaksamaan di atas pembuat nol adalah $a = -5$ atau $a = 7$, sehingga dengan Cara Kreatif Menentukan HP pertidaksmaan kuadrat kita peroleh $-5 < a < 7$

$\therefore$ Pilihan yang sesuai adalah $(C)\ -5 < a < 7$

28. Soal UM UGM 2005 Kode 621 | *Soal Lengkap

Batasan nilai p agar fungsi $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 2px + 5$ selalu turun untuk semua nilai x bilangan real adalah...

$(A)\ p < 2 \text{ atau } p > 0$
$(B)\ -2 \leq p \leq 0$
$(C)\ -2 < p < 0$
$(D)\ -2 \leq p < 0$
$(E)\ -2 < p \leq 4$

Alternatif Pembahasan: Hide

Syarat suatu fungsi $f(x)$ akan turun adalah saat $f'(x) < 0$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 2px + 5$$
$$f'(x) = -x^2 + 2px + 2p$$

Agar $f(x)$ turun maka $f'(x) < 0$ dan agar $f(x)$ selalu turun maka $f'(x) = -x^2 + 2px + 2p$ selalu kurang dari nol atau dengan kata lain $f'(x)$ adalah definit negatif. Syarat sebuah fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ definit negatif adalah:

- Koefisien x^2 bernilai negatif atau $a < 0$ sudah memenuhi karena $a = -1$
- Diskriminan $D = b^2 - 4ac$ kurang dari nol,

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &< 0 \\ (2p)^2 - 4(-1)(2p) &< 0 \\ 4p^2 + 8p &< 0 \\ p^2 + 2p &< 0 \\ (p)(p+2) &< 0 \end{aligned}$$

Dari pertidaksamaan di atas pembuat nol adalah $p = 0$ atau $p = -2$, sehingga dengan Cara Kreatif Menentukan HP pertidaksmaan kuadrat kita peroleh $-2 < p < 0$

$\therefore$ Pilihan yang sesuai adalah $(C)\ -2 < p < 0$

29. Soal SPMB 2005 Regional I | *Soal Lengkap

> Pada selang $-1 \leq x \leq 2$, fungsi $y = x^3 - 3x^2 + 3$ mempunyai nilai maksimum...
> $(A)\ -6$
> $(B)\ -1$
> $(C)\ 3$
> $(D)\ 6$
> $(E)\ 8$

Alternatif Pembahasan: Hide

Catatan calon guru yang mungkin kita perlukan tentang Turunan Fungsi yaitu;
Nilai maksimum atau minimum suatu fungsi $f(x)$ dapat ditentukan dengan uji turunan pertama atau uji turunan kedua.

- Jika $x = a$ pada $f'(a) = 0$ sehingga $f''(a) > 0$ maka $x = a$ adalah pembuat $f(x)$ minimum atau nilai minimum $f(x)$ adalah $f(a)$.
- Jika $x = a$ pada $f'(a) = 0$ sehingga $f''(a) < 0$ maka $x = a$ adalah pembuat $f(x)$ maskimum atau nilai maksimum $f(x)$ adalah $f(a)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x^2 + 3 \\
f'(x) &= 3x^2 - 6x \\
\hline
f'(x) &= 0 \\
0 &= 3x^2 - 6x \\
0 &= x^2 - 2x \\
0 &= (x)\,(x-2) \\
&\text{diperoleh pembuat nol} \\
x &= 0 \text{ atau } x = 2
\end{aligned}
$$

Dari yang kita peroleh di atas maka $f(x)$ akan maksimum/minimum di $x = 0$ atau $x = 2$

Dengan menggunakan uji turunan kedua kita peroleh:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 6x \\
f''(x) &= 6x - 6 \\
\hline
f''(0) &= 6(0) - 6 = -6 < 0 \\
&\star \text{Nilai maksimum } f(0) \\
f''(2) &= 6(2) - 6 = 6 > 0 \\
&\star \text{Nilai minimum } f(2)
\end{aligned}
$$

Nilai maksimum $f(0)$ dan Nilai minimum $f(2)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x^2 + 3 \\
f(0) &= (0)^3 - 3(0)^2 + 3 \\
&= 0 - 0 + 3 = 3 \\
\hline
f(2) &= (2)^3 - 3(2)^2 + 3 \\
&= 8 - 12 + 3 = -1
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Pilihan yang sesuai $(C)\ 3$

30. Soal SPMB 2005 Regional II | *Soal Lengkap

Pada selang $0 \leq x \leq 4$, jarak terjauh dari kurva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ dengan sumbu x adalah...
$(A)\ 1$
$(B)\ 2$
$(C)\ 4$
$(D)\ 8$
$(E)\ 16$

Alternatif Pembahasan: Hide

Catatan calon guru yang mungkin kita perlukan tentang Turunan Fungsi yaitu;
Nilai maksimum atau minimum suatu fungsi $f(x)$ dapat ditentukan dengan uji turunan pertama atau uji turunan kedua.

- Jika $x = a$ pada $f'(a) = 0$ sehingga $f''(a) > 0$ maka $x = a$ adalah pembuat $f(x)$ minimum atau nilai minimum $f(x)$ adalah $f(a)$.
- Jika $x = a$ pada $f'(a) = 0$ sehingga $f''(a) < 0$ maka $x = a$ adalah pembuat $f(x)$ maskimum atau nilai maksimum $f(x)$ adalah $f(a)$.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f'(x) = 0$$
$$0 = 3x^2 - 12x + 9$$
$$0 = x^2 - 4x + 3$$
$$0 = (x - 3)(x - 1)$$
$$\text{diperoleh pembuat nol}$$
$$x = 3 \text{ atau } x = 1$$

Dari yang kita peroleh di atas maka $f(x)$ akan maksimum/minimum di $x = 1$ atau $x = 3$

Dengan menggunakan uji turunan kedua kita peroleh:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$
$$f''(1) = 6(1) - 12 = -6 < 0$$
$$\star \textbf{ Nilai maksimum } f(1)$$
$$f''(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0$$
$$\star \textbf{ Nilai minimum } f(3)$$

Nilai maksimum $f(1)$ dan Nilai minimum $f(3)$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1)$$
$$= 1 - 6 + 9 = 4$$
$$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3)$$
$$= 27 - 54 + 27 = 0$$

Pada selang $0 \leq x \leq 4$ jarak terjauh kurva sama dengan nilai maksimum atau nilai minimum. Pada kasus ini nilai minimum adalah 0 dan nilai maksimum adalah 4, sehingga jaraka terjauh kurva terhadap sumbu x adalah 4.

$\therefore$ Pilihan yang sesuai (C) 4