<u>Ecuaciones de la recta</u>

<u>Guía elaborada por el profesor Joel Fariñez</u>

En esta guía se hará una breve introducción al tema relacionado con la función afín y las ecuaciones de la recta, si bien es cierto que la función afín se trató de manera simple y breve en la primera guía pues en esta oportunidad se profundizará un poco más en sus características por medio de las ecuaciones de la recta y los conceptos de rectas paralelas y perpendiculares. Así que se empezará con un repaso de la función afín, y al final de la guía se encontraran los respectivos ejercicios de práctica.

La función afín se define como una relación numérica entre dos conjuntos no vacíos del conjunto de los números reales mediante la ecuación $y = mx + b$ o también $f(x) = mx + b$ (esto por el hecho de que $y = f(x)$), en donde, como ya se estudió en segundo año, m representa la pendiente de la recta o el valor del ángulo de inclinación de la recta respecto al eje horizontal, mientras que b representa el punto de corte con en el eje de las ordenadas; además dicha ecuación se conoce como la ecuación canónica de la recta o de la función afín.

Otras de las fórmulas importantes y de habitual aplicación en el estudio de la función afín son las siguientes:

Ecuación de la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ esta ecuación establece la pendiente de la recta que pasa entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en donde las letras con subíndices representan las coordenadas de dichos puntos

Ecuación punto pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$ esta ecuación establece la relación entre la pendiente m de una recta y un punto cualquiera de coordenadas (x_0, y_0) se ha de destacar que esta fórmula de suma importancia también es estudios de matemática de nivel superior, específicamente en el área del cálculo diferencial.

Ecuación general de la recta: $Ax + By + C = 0$ esta sencilla ecuación es de suma importancia incluso en áreas especializadas de Matemáticas Avanzadas y Aplicadas tales como Geometría Diferencial.

Pasemos ahora a ver unos ejemplos de aplicación de dichas fórmulas

Ejemplo 1

Dados los puntos $A(-3, 5)$ y $B(-7, 4)$ hallar la pendiente y la ecuación general de la recta

En este ejercicio empezamos por aplicar la fórmula de la pendiente de la recta.

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ en donde identificamos las coordenadas $x_1 = -3$; $y_1 = 5$ que son las coordenadas del punto A; así mismo se tiene que $x_2 = -7$; $y_2 = 4$ que son las coordenadas del punto B luego tenemos que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 5}{-7 - (-3)} = \frac{-1}{-7 + 3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

ahora como ya tenemos la pendiente de la recta el siguiente paso es hallar la ecuación canónica de la recta de que pasa por dichos puntos, es decir, debemos hallar la ecuación de la forma $y = mx + b$ para ello realizamos el siguiente procedimiento:

primero elegimos cualquiera de los dos puntos, el A o el B, en este ejemplo vamos a tomar el punto A, se le recomienda al estudiante realizar el mismo procedimiento con el punto B para que se cerciore que obtiene el mismo resultado

Punto $A(-3, 5)$ con este punto vamos a realizar la identificación de coordenadas así: recordemos que el primer número va siempre en el eje x , de esto se deduce que $x = -3$, de la misma manera el segundo número siempre pertenece al eje y , así tenemos que $y = 5$. Además de esto tenemos que en nuestro caso $m = \dfrac{1}{4}$ y el punto de corte con el eje y que es la letra b lo obtenemos sustituyendo los datos anteriores en $y = mx + b$

Entonces nos quedaría $5 = \frac{1}{4} \cdot (-3) + b$

o lo que es lo mismo $5 = -\frac{3}{4} + b$

y de esta última ecuación podemos despejar a b pasando al $-\frac{3}{4}$ del otro lado de la igualdad pero con signo positivo,

es decir, $5 + \frac{3}{4} = b$,

y realizando las operaciones pertinentes nos da $b = 5 + \frac{3}{4} = \frac{20 + 3}{4} = \frac{23}{4}$

Ahora podemos construir nuestra ecuación canónica $y = mx + b$

la cual quedaría así $y = \frac{1}{4} x + \frac{23}{4}$

Con este resultado ya podemos hallar la ecuación de la recta, para ello pasamos el segundo miembro de la igualdad anterior al otro lado, quedando así

$y - \frac{1}{4}x - \frac{23}{4} = 0$ para presentar una solución más elegante podemos multiplicar la expresión anterior por 4 a fin de eliminar los denominadores

$4y - x - 23 = 0$ o también $-x + 4y - 23 = 0$

<u>Ejemplo 2</u>

La pendiente una recta viene dada por el valor $m = -3$ y se tiene un punto de la misma de coordenadas $(-5, -8)$ hallar la ecuación general de dicha recta.

En este caso podemos hallar la ecuación canónica de la recta ($y = mx + b$) para ello vamos a utilizar la ecuación denominada punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$,

en este caso ya tenemos $m = -3$,

las coordenadas x_0 y y_0 las obtenemos identificando $-5 = x_0$ y $-8 = y_0$
con estos datos se tiene que la ecuación punto-pendiente queda así:
$y - (-8) = -3 \cdot (x - (-5))$
realizando las operaciones respectivas queda:
$y + 8 = -3 \cdot (x + 5) \Rightarrow y + 8 = -3x - 15$
pasando todos términos del segundo miembro tenemos y operando se tiene
$y + 8 + 3x + 15 = 0$

$y + 3x + 23 = 0$ o $3x + y + 23 = 0$ la cual es la ecuación general de la recta que se pedía

Rectas paralelas

Dadas dos rectas $y = m_1 x + b$ y $y = m_2 x + c$
se dicen que dichas rectas son paralelas si y solo si $m_1 = m_2$
es decir, si sus pendientes son iguales

Ejemplos:

$y = 3x + 5$ y $y = 3x - 2$ son rectas paralelas pues tienen la misma pendiente
$m_1 = m_2 = 3$

$y = -2x + 1$ y $y = 2x + 1$ no son paralelas pues tienen pendientes distintas
$-2 \neq 2$

Rectas perpendiculares

Dadas dos rectas $y = m_1 x + b$ y $y = m_2 x + c$

se dicen que dichas rectas son perpendiculares si y solo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$
es decir, si la pendiente de una es igual al valor inverso negativo de la otra por

ejemplo

$y = 2x + 3$ y $y = -\frac{1}{2}x + 3$ son perpendiculares pues se verifica que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ ya que $2 = -\frac{1}{2}$

$y = -3x + 1$ y $\frac{1}{3}x - 3$ son perpendiculares pues se verifica que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ ya que $-3 = \frac{1}{3}$

$y = 4x - 5$ y $y = \frac{1}{4}x - 5$ no son perpendiculares pues se verifica que $m_1 \neq -\frac{1}{m_2}$ ya que $2 = -\frac{1}{2}$

Veamos ahora unos ejemplos de ejercicios de aplicación de estos conceptos

Ejemplo 3

Dadas las rectas cuyas ecuaciones son: $2x + y - 5 = 0$ y $8x + 4y + 12 = 0$ determinar si son paralelas o no.

Se observa que esas ecuaciones están en la forma de ecuación general de la recta, entonces procederemos a llevarlas a sus formas canónicas.

$2x + y - 5 = 0$ aquí despejamos y para obtener la ecuación canónica para ello pasamos el 2x y el -5 del otro lado de la igualdad cambiándoles los signos

$y = -2x + 5$

Hacemos lo mismo con la segunda ecuación

$8x + 4y + 12 = 0$ vamos a despejar y aplicando los mismo pasos que en la ecuación anterior

$4y = -8x - 12$ aquí se observa que podemos dividir cada término por 4 ya que este sería el máximo común divisor de 4,8 y 12

$\frac{4}{4}y=-\frac{8}{4}x-\frac{12}{4} \Rightarrow y=-2x-3$ como podemos ver la pendiente de ambas rectas (qué es el número que acompaña a la x) es la misma por lo tanto ambas rectas son paralelas.

Ejemplo 4

La pendiente de una recta viene dado por $m=3$ dicha recta se intercepta con otra recta de manera perpendicular con otra recta y el punto de corte (intercepción) de ambas rectas viene dado por las coordenadas $\left(\frac{9}{10},\frac{7}{10}\right)$. Hallar las ecuaciones generales de dichas rectas.

En este ejercicio primero procederemos a hallar la ecuación canónica de la primera recta de pendiente $m=3$ y punto e coordenadas $\left(\frac{9}{10},\frac{7}{10}\right)$, para ello utilizaremos la ecuación punto-pendiente que viene dada por la expresión $y-y_0=m(x-x_0)$ en donde como dijimos $m=3$ y $x_0=\frac{9}{10}$ y $y_0=\frac{7}{10}$ sustituyendo los respectivos valores en la ecuación anterior se tiene

$y-\frac{7}{10}=3\left(x-\frac{9}{10}\right)$ realizando las operaciones indicadas tenemos

$y-\frac{7}{10}=3x-\frac{3\cdot 9}{10}$

$y-\frac{7}{10}=3x-\frac{27}{10}$ ahora pasando el $-\frac{7}{10}$ al otro lado de la igualdad y resolviendo

$y=3x-\frac{27}{10}+\frac{7}{10}=3x+\frac{-27+7}{10}=3x+\left(-\frac{20}{10}\right)$ simplificando la fracción nos queda

$y=3x-2$

ahora bien para hallar la ecuación de la segunda recta utilizamos la fórmula

$m_1=-\frac{1}{m_2}$ en donde $m_1=3$

luego tenemos que $3=-\frac{1}{m_2} \Rightarrow m_2=-\frac{1}{3}$ de aquí ya obtenemos la pendiente de la segunda recta y ahora volvemos a utilizar la expresión $y-y_0=m\left(x-x_0\right)$ en donde $m=-\frac{1}{3}$ y $x_0=\frac{9}{10}$ y $y_0=\frac{7}{10}$

y aplicando los mismos pasos que en la ecuación anterior obtenemos

$y-\frac{7}{10}=\frac{-1}{3}\left(x-\frac{9}{10}\right)$ realizando las respectivas operaciones en los siguientes pasos se tiene

$$y-\frac{7}{10}=-\frac{1}{3}\cdot x-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{9}{10}$$

$y-\frac{7}{10}=-\frac{x}{3}+\frac{9}{30}$ simplificando la última fracción obtenemos en el siguiente paso

$y-\frac{7}{10}=-\frac{x}{3}+\frac{3}{10}$ ahora pasamos el $-\frac{7}{10}$ del otro lado de la igualdad y operamos

$y=-\frac{x}{3}+\frac{3}{10}+\frac{7}{10}=-\frac{x}{3}+\frac{3+7}{10}=-\frac{x}{3}+\frac{10}{10}$ y volvemos a simplificar la última fracción

$$y=-\frac{x}{3}+1$$

Las ecuaciones generales de ambas recta se obtiene como ya se ha explicado en los ejercicios respectivos

la primera $y=3x-2$ pasamos todos los términos del segundo miembro al primer miembro

$$-3x+y+2=0$$

la segunda $y=-\frac{x}{3}+1$ hacemos igual que con la primera

$\frac{x}{3}+y-1=0$ aquí podemos multiplicar por 3 para eliminar la fracción

$$3\cdot\left(\frac{x}{3}+y-1\right)=0\cdot 3$$

$$x+3y-3=0$$

Ejercicios propuestos

1.) Dados los puntos $A(-8,3)$ y $B(-9,6)$ hallar la pendiente y la ecuación general de la recta

2.) La pendiente una recta viene dada por el valor $m=-5$ y se tiene un punto de la misma de coordenadas $(1,-1)$ hallar la ecuación general de dicha recta.

3.) Dadas las rectas cuyas ecuaciones son: $7x+y-1=0$ y $21x+3y+3=0$ determinar si son paralelas o no.

4.) La pendiente de una recta viene dado por $m=-2$ dicha recta se intercepta con otra recta de manera perpendicular con otra recta y el punto de corte (intercepción) de ambas rectas viene dado por las coordenadas $(4,-3)$.

Hallar las ecuaciones generales de dichas rectas.