Exercice 9 | Exercice 12

TD 3

1

Exercice N°01:

1. La division euclid de A par B

$$
\begin{array}{l|l}
A = 3x^5 + 4x^2 + 1 & x^2 + 2x + 3 \\
\hline
-(3x^5 + 6x^4 + 9x^3) & 3x^3 - 6x^2 + 3x + 16 \\
\hline
-6x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 1 & \\
-(-6x^4 - 12x^3 - 18x^2) & \\
\hline
3x^3 + 22x^2 + 1 & \\
-(3x^3 + 6x^2 + 9x) & \\
\hline
16x^2 - 9x + 1 & \\
-(16x^2 + 32x + 48) & \\
\hline
-41x - 47 = R &
\end{array}
$$

2. D S P ↑ à l'ordre $k = 3$

$B = 1 + 2x + 3x^2$

$$
\begin{array}{l|l}
A = 2 + 4x^2 + x^3 & 1 + 2x + 3x^2 \\
\hline
-(2 + 4x + 6x^2) & 2 - 4x + 6x^2 \\
\hline
0 - 4x - 2x^2 + x^3 & \\
- -4x - 8x^2 - 12x^3 & \\
\hline
6x^2 + 13x^3 & \\
- 6x^2 + 12x^3 + 18x^4 & \\
\hline
0 + x^3 - 18x^4 & \\
- x^3 + 2x^4 + 3x^5 & \\
\hline
-20x^4 - 3x^5 & \\
= x^4(-20 - 3x) &
\end{array}
$$

alors $A = B.(2 - 4x + 6x^2 + x^3) + x^4(-20 - 3x)$

3. $A = -x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1$

$B = -x^2 + 2x + 1$

$Q_1 ? R_1 ?$ tq

$A = BQ_1 + R$, $\deg(Q_1) = 2$

$\deg(R_1) = 1$

Methode générale

$\deg(Q_1) = 2 \Rightarrow Q_1 = ax^2 + bx + c$

$\deg(R_1) = 1 \Rightarrow R_1 = dx + e$

$A = BQ_1 + R_1 \Leftrightarrow A = B(ax^2 + bx + c) + dx + e$

par identification:

a =

b =

c =

d =

e =

DE de A par B.

$$
\begin{array}{l|l}
A = -x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1 & -x^2 + 2x + 1 \\
\hline
- \; -x^4 + 2x^3 + x^2 & \underbrace{x^2 - x - 3}_{Q_1} \\
\hline
x^3 - 5x + 1 & \text{tq } \deg(Q_1) = 2 \\
- \; x^3 - 2x^2 - x & \text{d'on a} \\
\hline
3x^2 - 4x + 1 & A = BQ_1 + R_1 \\
- \; 3x^2 - 6x - 3 & \deg(Q_1) = 2 \\
\underbrace{2x + 4}_{R_1 \to \deg(R_1) = 1} & \deg R = 1
\end{array}
$$

Rmq

si $\deg(R_1) = 0$ la solution est l'ensemble vide

$A = BQ_2 + R_2$

$\deg(Q_2) = 3$ et $\deg R_2 = 5$

Méthode 1:

Essayons la D.S.P ↑ de A par B à l'ordre $k = 3$.

$$
\begin{array}{l|l}
1 - 5x + 2x^2 + 3x^3 - x^4 & 1 + 2x - x^2 \\
\hline
- 1 - 2x + x^2 & 1 - 7x + 17x^2 - 38x^3 \\
\hline
-7x + 3x^2 + 3x^3 - x^4 & \\
+7x + 14x^2 - 7x^3 & \\
\hline
17x^2 - 4x^3 - x^4 & \\
- 17x^2 - 34x^3 + 17x^4 & \\
\hline
-38x^3 + 16x^4 & \\
+38x^3 + 76x^4 - 38x^5 & \\
\hline
= 92x^4 - 38x^5 = R_2 & \\
= x^4(92 - 38x) &
\end{array}
$$

Résumé:

$A = BQ_2 + R_2$

$\deg Q_2 = 3$ $\deg(R_2) = 5$

Méthode 2 : classique

on va trouver toutes les solutions.

$\deg Q_2 = 3 \Rightarrow Q_2 = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$

$\deg(R_2) = 5 \Rightarrow R_2 = b_5X^5 + b_4X^4 + b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0 \neq 0$

$A = (-X^2 + 2X + 1)(a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0) + b_5X^5 + b_4X^4 + b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0$

$A = (-a_3 + b_5)X^5 + (-a_2 + 2a_3 + b_4)X^4 + (-a_1 + 2a_2 + a_3 + b_3)X^3 + (-a_0 + 2a_1 + a_2 + b_2)X^2 + (2a_0 + a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)$

Par identification :

$$\begin{cases} -a_3 + b_5 = 0 \\ -a_2 + 2a_3 + b_4 = -1 \\ -a_1 + 2a_2 + a_3 + b_3 = 3 \\ -a_0 + 2a_1 + a_2 + b_2 = 2 \\ 2a_0 + a_1 + b_1 = -5 \\ a_0 + b_0 = 1 \end{cases}$$

on écrit $a_0, \dots, a_3$ et b_4 et b_5 en fct de b_0, b_1, b_2, b_3 sont quelcq dans $\mathbb{R}$

$$S = \left\{ (Q_2, R_2) \text{ avec } Q_2 = a_0 + \cdots,\ R_2 = \cdots ;\ b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2 :

on a : $P \in \mathbb{R}[X]$ tq :

$\tilde{P}(1) = 3$, $\tilde{P}^{(1)}(1) = 4$, $\tilde{P}^{(2)}(1) = 5$ et $\tilde{P}^{(n)}(1) = 0$; $\forall n \geq 3$

on a d'après la formule de Taylor

$$P = \tilde{P}(1) + \frac{\tilde{P}^{(1)}(1)}{1!}(X-1) + \frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{2!}(X-1)^2 + \cdots + \frac{\tilde{P}^{(n)}(1)}{n!}(X-1)^n$$

$= 3 + 4(X-1) + \frac{5}{2}(X-1)^2 + 0 + 0 \cdots$

$= 3 + 4X - 4 + \frac{5}{2}(X^2 - 2X + 1) + 0 + \cdots + 0$

$\Rightarrow P = -1 + 4X + \frac{5}{2}X^2 - 5X + \frac{5}{2}$

$$\boxed{P = \frac{5}{2}X^2 - X + \frac{3}{2}}$$

Exercice 3 :

P ? $\deg P = 6$ tq

- $P + 1$ est divisible par $(X-1)^3$ (1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists Q_1 \in \mathbb{R}[X] \text{ tq} \\ P + 1 = Q_1(X-1)^3 \end{cases}$

- $P + 2$ est divisible par X^4

$\Leftrightarrow \exists Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tq $P + 2 = Q_2X^4$ (2)

(1) $\Rightarrow \deg Q_1 = 6 - 3 = 3$

(2) $\Rightarrow \deg Q_2 = 6 - 4 = 2$

alors $Q_1 = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$

et $Q_2 = b_0 + b_1X + b_2X^2$

(1) et (2) $\Rightarrow$

$Q_1(X-1)^3 = Q_2X^4 - 1$

Methode 1 : identification

Methode 2 :

(1) $\Rightarrow$ 1 est un zéro de $P+1$ de multip ≥ 3

$\Rightarrow$ 1 est un zéro de $(P+1)' = P'$ de multip ≥ 2 (d'après le cour)

alors : $\boxed{P' = (X-1)^2 D_1}$ (3) $D_1 \in \mathbb{R}[X]$

(2) $\Rightarrow$ 0 est un zéro de $P + 2$ de multip ≥ 4

$\Rightarrow$ 0 est un zéro de $(P+2)' = P'$ de multipl ≥ 3

alors $\boxed{P' = X^3 D_2}$ (4)

or $\deg P' = 6 - 1 = 5$??

on a $(X-1)^2$ divise P' et X^3 divise P'

$\Rightarrow (X-1)^2 X^3$ divise P' or $\deg P' = 5$

donc $P' = c \cdot (X-1)^2 X^3$

$P = \int P' = c\int (X^5 + 2X^4 + \cdots + X^3)$

$= c\left(\frac{X^6}{6} - \frac{2X^5}{5} + \frac{X^4}{4}\right) + c'$

$\deg P = 6$

3 suite

Méthode 1 : identification

$Q_1 (X-1)^3 = Q_2 X^4 - 1$

Méthode 2 zéro de P'

$\rightarrow$ factorisant P'

$\Rightarrow P' \Rightarrow P$

$P = C_1\left(\frac{X^6}{6} - 2\frac{X^5}{5} + \frac{X^4}{4} + C_2\right)$

$C_1 ?\ C_2 ?$

$\tilde{P}(0) = -2 \Rightarrow C_1 C_2 = -2$

$\tilde{P}(1) = -1 \Rightarrow C_1\left(\frac{1}{60} + C_2\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{C_1}{60} - 2 = -1$

$\Rightarrow C_1 = 60$

$C_2 = \frac{-2}{60} = \frac{-1}{30}$

2) $P ?$ $\deg P = 6$

$(X-1)^3 / P+1$ ① et $(X+1)^3 / P-2$ ②

1) $\Rightarrow$ 1 est zéro de $(P+1)$ de multip ≥ 3

2) $\Rightarrow$ -1 " $\quad P-2 \quad \geq 4$

alors 1 est zéro de P' de multip ≥ 2

-1 " " ≥ 3

$\Rightarrow P' = Q(X-1)^2(X+1)^3$

or $\deg P = 6$ et $\deg P' = 5$

$P' = C_1 (X-1)^2 (X+1)^3$ $\quad C_1 = cste$

$P = \int P' = C_1(\dots + C_2)$

$C_1 ?\ C_2 ?$

$\tilde{P}(1) = -1 \Rightarrow$

$\tilde{P}(-1) = -2 \Rightarrow$

Exo 4 :

$n \in \mathbb{N}$, $A_n = X^n \sin\theta - X\sin n\theta + \sin(n-1)\theta$

$B = X^2 - 2X\cos\theta + 1$

D.E de A_n par $B \longrightarrow Q_n, R_n$

Exercice 2 :

1) a $n = 2$

$X^2\sin(\theta) - X\sin 2\theta + \sin\theta$ $\quad | \; X^2 - 2X\cos\theta + 1$

$-X^2\sin\theta - 2X\cos\theta\sin\theta + \sin\theta$

$= -X(\sin 2\theta) - 2\cos\theta\sin\theta$

$= 0$

b $n = 3$

$X^3\sin\theta - X\sin(3\theta) + \sin(2\theta)$ $\quad | \; X^2 - 2X\cos\theta + 1$

$-X^3\sin\theta - 2X^2\cos\theta\sin\theta + X\sin\theta$

$X^2\sin 2\theta - X(\sin 3\theta + \sin\theta) + \sin 2\theta$

$= X^2\sin 2\theta - 2X\sin 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta$

$-X^2\sin 2\theta - 2X\sin 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta$

0

Donc $\begin{cases} Q_3 = X\sin\theta + \sin 2\theta \\ \text{et} \\ R_3 = 0 \end{cases}$

(*) $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

c $n = 4$

$X^4\sin\theta - X\sin 4\theta + \sin 3\theta$ $\quad | \; X^2 - 2X\cos\theta + 1$

$-X^4\sin\theta + 2X^3\sin\theta\cos\theta - X^2\sin\theta$

$X^3\sin 2\theta - X^2\sin\theta - X\sin 4\theta + \sin 3\theta$

$X^3\sin 2\theta + 2X^2\cos\theta\sin 2\theta - X\sin 2\theta$

$= -X^3\sin 2\theta + X^2(\sin 3\theta + \sin\theta) - X\sin 2\theta \dots$

$X^2\sin 3\theta - X(\sin 4\theta + \sin 2\theta) + \sin 3\theta$

$-X^2\sin 3\theta + 2X\cos\theta\sin 3\theta - \sin 3\theta$

$X(2\cos\theta\sin 3\theta - \sin 4\theta - \sin 2\theta)$

$= 0 = R_3$ (d'après (*))

2) Mq $\forall n \geq 2$, $R_n = 0$

$Q_n = X^{n-2}\sin\theta + X^{n-3}\sin 2\theta + \dots + X\sin(n-2)\theta + \sin(n-1)\theta$

$= \sum_{k=1}^{n-1} X^{n-k-1}\sin(k\theta)$

Par récurrence

pour $n = 2$ on a déjà montré dans la Q 1.a) $R_2 = 0$ et $Q_2 = \sin\theta = \sum_{k=1}^{1} X^{2-k-1}\sin(k\theta) = X^0\sin(\theta)$

donc la prop est vraie pour $n = 2$

H.R : On suppose que la prop est vraie de $3 \rightarrow$ un entier n

$\begin{cases} R_n = 0 \\ Q_n = \sum_{k=1}^{n-1} X^{n-k-1}\sin(k\theta) \end{cases}$ avec $A_n = B Q_n$

Mq la prop est vraie pour $(n+1)$

On a $A_n = X^n \sin\varphi - X\sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi$

$A_{n+1} = X^{n+1}\sin\varphi - X\sin(n+1)\varphi + \sin n\varphi$

on pose $D_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} X^{n-k}\sin(k\varphi)$

Mq $D_{n+1} = A_{n+1}$ et $R_{n+1} = 0$

on a $B D_{n+1} = X^2 \sum_{k=1}^{n} X^{n-k}\sin(k\varphi)$

$-2X\cos\varphi \sum_{k=1}^{n} X^{n-k}\sin(k\varphi) + \sum_{k=1}^{n} X^{n-k}\sin k\varphi$

$\Rightarrow B D_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} X^{n+2-k}\sin k\varphi$

on a $D_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} X^{n-k}\sin(k\varphi) + \sin(n\varphi)$

$= X\sum_{k=1}^{n-1} X^{n-k-1}\sin(k\varphi) + \sin(n\varphi)$

d'après H.R

donc $D_{n+1} = XQ_n + \sin(n\varphi)$

$\Rightarrow B D_{n+1} = XBQ_n + B\sin(n\varphi)$

$= XA_n + B\sin(n\varphi)$

d'après H.R :

$= X^{n+1}\sin\varphi - X^2\sin(n\varphi) + X\sin(n-1)\varphi$

$+ X^2\sin n\varphi - 2X\cos\varphi\sin n\varphi + \sin n\varphi$

$= X^{n+1}\sin\varphi + X(\sin(n-1)\varphi - 2\cos\varphi\sin n\varphi) + \sin(n\varphi)$

$= X^{n+1}\sin\varphi - X\sin(n+1)\varphi + \sin(n\varphi)$

$= A_{n+1}$

$(\sin(n\varphi)\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\sin(n+1)\varphi + \sin(n-1)\varphi)$

d'où $B D_{n+1} = A_{n+1}$

d'où $Q_{n+1} = D_{n+1}$

et $R_{n+1} = 0$

Exo 7 : Relat° coff racine deg 3

1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = 3$

$P = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$

et soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les 3 racines de P distincts ou non

$P = \prod_{k=1}^{3}(X - \alpha_k)$

$= (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$

$= (X^2 - X(\alpha_2+\alpha_1) + \alpha_1\alpha_2)(X-\alpha_3)$

$= X^3 + (-\alpha_3 -$

Par identification :

Resultat :

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_0}{a_3} & (1) \\ \alpha_3+\alpha_2+\alpha_1 = -\frac{a_2}{a_3} & (2) \\ \alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1 = \frac{a_1}{a_3} & (3) \end{cases}$$

Soit $P: X^3 + 2X^2 + 3X + \lambda \in \mathbb{C}[X]$

α_1, α_2 et α_3 sont des racine de P dans $\mathbb{C}[X]$ tq $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}$

on a :

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\lambda & (1) \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = 3 & (2) \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -2 \end{cases}$$

on suppose que $\alpha_1\alpha_2 = 2$ (3)

$$\begin{cases} \alpha_3 = -\frac{\lambda}{2} \\ \alpha_3 = \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)} \\ \alpha_3 = -2 - (\alpha_1+\alpha_2) \\ \quad = -2 - \frac{1}{\alpha_3} \end{cases}$$

(2)

$\boxed{(2) \Rightarrow 2 + \alpha_3(\alpha_1+\alpha_2) = 3 \\ \Rightarrow \alpha_3(\alpha_1+\alpha_2) = 1}$

$\alpha_3^2 + 2\alpha_3 + 1 = 0$

$\Rightarrow (\alpha_3+1)^2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_3 = -1$

$\Rightarrow \lambda = 2$

Exercice 8 : Fact dans $\mathbb{R}[X]$ (3)

$X^6 + 1$

1ère méthode :

$P = X^6 + X^4 - X^4 + X^2 - X^2 + 1$

$P = X^4(X^2+1) - X^2(X^2+1) + X^2 + 1$

$P = (X^2+1)$

factorisant $X^4 - X^2 + 1$:

On pose $D = (X^2)^2 - X^2 + 1$

$= (X^2)^2 - 2X^2 + 1 - 3X^2$

$= (X^2+1)^2 - 3X^2$

$= (X^2+1-\sqrt{3}X)(X^2+1+\sqrt{3}X)$

$= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$

donc $P = (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$

2ème méthode :

on a $P = X^6 + 1$

$= (X^2)^3 + 1$

$= (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1)$

$= (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$

$= (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$

3ème méthode :

fact d'abord $\mathbb{C}$ les racines de P sont les racines 6ème de $-1 \cdot e^{i\pi}$

Rappel :

$z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

Les racines nième de z sont les zéros de $z^n - 1$ sont $z_k = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$

$k = 0, \dots, n-1$

alors les racines 6ème de -1 sont $z_k = e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)}$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots, 5$

alors la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

Exercice 9

$P = \prod_{k=0}^{5} (X - z_k)$

$= (X - e^{i\pi/6})(X - e^{i\pi/2})(X - e^{i\frac{5\pi}{6}})$
$(X - e^{i\frac{7\pi}{6}})(X - e^{i\frac{9\pi}{6}})(X - e^{i\frac{11\pi}{6}})$

on a $z_0 = \overline{z_5}$, $z_1 = \overline{z_4}$, $z_2 = \overline{z_3}$

alors :

$P = (X - e^{i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})(X - e^{i\pi/2})(X - e^{-i\pi/2})$
$(X - e^{i\frac{5\pi}{6}})(X - e^{-i\frac{5\pi}{6}})$

$= (X^2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{i\pi/6})X + 1)(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{i\pi/2})X + 1)$
$(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{i\frac{5\pi}{6}})X + 1$

$= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$

Exo 7 : suite.

2) x_1, x_2, x_3 sont les racines du $P = X^3 + aX^2 + bX + c$

Q ? $\deg Q = 3$ tq

Les racines de Q sont :

$x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_1 x_3$

On pose $Q = dX^3 + eX^2 + fX + g$

En utilisant les relations entre coef et racines on obtient :

Pour P :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a}{1} = -a \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = b \\ x_1 x_2 x_3 = -c \end{cases}$$

Pour Q :

$$\begin{cases} x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = -\frac{e}{d} \\ x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 = \frac{f}{d} \\ (x_1 x_2 x_3)^2 = -\frac{g}{d} \end{cases}$$

(1) et (4) $\Rightarrow$ $b = -\frac{e}{d} \Rightarrow \boxed{e = -bd}$

(3) et (6) $\Rightarrow$ $c^2 = -\frac{g}{d} \Rightarrow \boxed{g = -dc^2}$

$(5) \Rightarrow x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3) = \frac{f}{d}$

d'où d'après (4) et (3) on obtient :

$ac = \frac{f}{d} \Rightarrow \boxed{f = acd}$

d'où :

$Q = d(x^3 - bx^2 + 0x + c)$

d dans $\mathbb{C}^*$

Par exemple $d = 1$

$Q =$

Exercice 9.

$(Z+1)^n = e^{i2na}$ (1)

Posons $V = Z+1$

$(1) \Rightarrow V^n = e^{i2na}$

alors V est racine $n^{ième}$ de e^{i2na}

d'où $V_k = e^{i\frac{2na+2k\pi}{n}}$ $k = 0, \dots, n-1$

d'après le rappel

$Z_k = V_k - 1 = e^{i\frac{2(na+k\pi)}{n}} - 1$

$$\boxed{Z_k = e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} - 1 \quad k = 0, \dots, n-1}$$

(2) Mq $\prod_{k=0}^{n-1} Z_k = (-1)^n(1 - e^{i2na})$

on a Z_k, $k = 0, 1, \dots, n-1$ est sol de (1) : eq algébrique

$\Rightarrow Z_k$ est racine de $(Z+1)^n - e^{i2na}$

soit $P = (X+1)^n - e^{i2na}$

$\Rightarrow P = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k - e^{i2na}$

(d'après formule binôme de Newton)

$= X^n + nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2}$

$+ \dots + nX + 1 - e^{i2na}$

D'après la relation entre coeff et racine :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} Z_k = (-1)^n(1 - e^{i2na})} \quad (3)$$

En deduire que :

$\prod_{k=0}^{n-1} \sin(a + k\frac{\pi}{n}) = \frac{1}{2^{n-1}}\sin(na)$

Rappel :

$\theta \in \mathbb{R}$

$e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})$

$= 2i\, e^{i\theta/2}\sin(\frac{\theta}{2})$

En utilisant ce rappel en (2) on obtient :

$Z_k = e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} - 1$, $k = 0, \dots, n-1$

$Z_k = 2i\, e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}\sin(a + \frac{k\pi}{n})$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} Z_k = \prod_{k=0}^{n-1}\left[2i\, e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}\sin(a+\frac{k\pi}{n})\right]$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} Z_k = 2^n(i)^n \prod_{k=0}^{n-1} e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} \prod_{k=0}^{n-1}\sin(a+\frac{k\pi}{n})$

on a :

$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}$

$= e^{i\sum_{k=0}^{n-1}(a+\frac{k\pi}{n})} = e^{i(na+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k\pi}{n})}$

$= e^{i(na+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\pi}{n})}$

$= e^{i(na+(n-1)\pi/2)}$

$= e^{ina} \cdot e^{i(n-1)\pi/2}$

$= e^{ina} \cdot (e^{i\pi/2})^{n-1}$

$= e^{ina} \cdot i^{n-1}$

Exercice 9 | Exercice 12

algèbre

5

(4) devient :

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 2^n (i)^n (i)^{n-1} e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= 2^n i^{2n-1} e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(\quad)$$

or : $i^{2n-1} = (-1)^n \frac{1}{i} = -(-1)^n i$ (5)

d'où $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} z_k = -2^n (-1)^n i e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(\quad)}$

d'autre part (3) $\Rightarrow$ (6)

$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^{n-1} 2 i e^{ina} \sin(na)}$

(5) et (6) $\Rightarrow 2^n (-1)^{n-1} i \, e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

$= (-1)^{n-1} 2 i \, e^{ina} \sin(na)$

$\Rightarrow \boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}}$

Exo 6 :

$B_p = x^p - a^p$

$A_m = x^m - a^m$

$m, p \in \mathbb{N} \quad m \geq p$

$a \in \mathbb{C} \quad a = r e^{i\theta}$

$B_p / A_m \Leftrightarrow$ | ttes les racines de B_p dans $\mathbb{C}$ des racines de A_m dans $\mathbb{C}$

Les racines de B_p sont :

$\tilde{B}(x) = 0 \Leftrightarrow x^p - a^p = 0$

$\Leftrightarrow x$ est racine $p^{ième}$ de

$a^p = r^p e^{i\theta p}$

or les racines $p^{ième}$ de a^p sont

$x_k = r e^{i\left(\frac{\theta p + 2k\pi}{p}\right)}$

$= r e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{p}\right)} \quad k = 0, \dots, p-1$

donc $B_p / A_m \Leftrightarrow \begin{cases} x_k \text{ est racine de } A_m \\ k = 0, \dots, p-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \tilde{A}_m(x_k) = 0, \; k = 0, \dots, p-n$

$\Leftrightarrow x_k^m - a^m = 0$

$\Leftrightarrow r^m e^{i(\theta m + \frac{2k\pi}{p} m)} - a^m = 0$

$k = 0, \dots, p-1$

$\Leftrightarrow r^m e^{i\theta m} e^{i \frac{2k\pi}{p} m} - a^m = 0$

$k = 0, \dots, p-1$

$\Leftrightarrow a^m \left(e^{i \frac{2k\pi}{p} m} - 1\right) = 0$

$k = 0, \dots, p-1$

$\Leftrightarrow e^{i \frac{2k\pi}{p} m} - 1 = 0 \quad (a \neq 0)$

$k = 0, \dots, p-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i0} = 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{p} m} = 1 \Leftrightarrow m = k'p \text{ (m multiple de p)} \\ e^{i\frac{4\pi}{p} m} = 1 \Leftrightarrow 2m \text{ multiple de p} \\ e^{i\frac{6\pi}{p} m} = 1 \Leftrightarrow 3m \quad " \quad " \\ e^{i2\frac{(p-1)\pi}{p} m} = 1 \Leftrightarrow (p-1)m \text{ multiple de p} \end{cases}$$

L'intersection de tt ces assertions on est multiple p

$B_p / A_m \Leftrightarrow m$ est multiple de

Exercice 8 : (suite)

$Q = x^8 + x^4 + 1$

$Q = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4$

$= (x^4 + 1)^2 - x^4$

$= (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2)$

$= (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)$

$= (x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)$

$= (x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2)((x^2 + 1)^2 - x^2)$

$= ((x^2+1)^2 - 3x^2)((x^2+1)^2 - x^2)$

$= (x^2 + 1 - \sqrt{3}x)(x^2 + 1 + \sqrt{3}x)(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$