

Тригонометрические уравнения

Основная идея решения тригонометрического уравнения – сведение его к одному или нескольким простейшим уравнениям, т.е. уравнениям вида

$$\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a.$$

Каждое из этих уравнений легко решается с помощью единичной окружности, на которой изображаются соответствующие точки, после чего с учетом периодичности тригонометрических функций записывается ответ.

С определенной степенью условности любое стандартное тригонометрическое уравнение («стандартное» не обязательно означает «простое») можно отнести к одному из двух основных типов: уравнения, сводимые к простейшим с помощью тех или иных тригонометрических преобразований (понижение степени, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение, введение вспомогательного угла и др.), и уравнения, вначале сводимые к алгебраическим с помощью той или иной замены переменной, а затем с помощью обратной замены, приводимые к одному или нескольким простейшим.

Основные трудности у участников экзамена, приступивших к решению тригонометрического уравнения, возникают на этапе отбора корней: при верно решенном уравнении либо неверно проводится отбор корней, либо не проводится вовсе. Рассмотрим различные способы отбора корней.

Арифметический способ:

- Непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;
- Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

Алгебраический способ:

- Решение неравенства относительно целочисленного параметра и вычисление корней;
- Исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Геометрический способ:

- Изображение корней на тригонометрической окружности и их отбор с учетом имеющихся ограничений;
- Изображение корней на числовой прямой с последующим отбором и учетом имеющихся ограничений.

Функционально-графический способ:

- Отбор корней с использованием графиков простейших тригонометрических функций.

Прежде, чем решать тригонометрические уравнения, вспомним основные тригонометрические формулы (каждый учащийся получает памятку с формулами).

Свойства четности и нечетности тригонометрических функций

$$\cos(-x) = \cos x - \text{четная}$$

$$\sin(-x) = -\sin x - \text{нечетная}$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x - \text{нечетная}$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x - \text{нечетная}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$

Обратные тригонометрические функции

$$\arcsin a = t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin t = a, \quad a \in [-1; 1] \quad \operatorname{arctg} a = t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{tg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin(\sin t) = t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1; 1]$$

$$\arccos a = t, \quad t \in [0; \pi], \quad \cos t = a, \quad a \in [-1; 1]$$

$$\arccos(\cos t) = t, \quad t \in [0; \pi]$$

$$\cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1; 1]$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcctg} a = t, \quad t \in (0; \pi), \quad \operatorname{ctg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t, \quad t \in (0; \pi)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Формулы приведения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t$$

$$\sin(\pi \pm t) = \mp \sin t$$

$$\cos(\pi \pm t) = -\cos t$$

$$\operatorname{tg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t$$

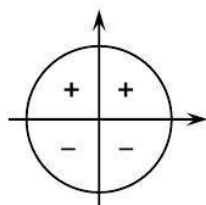
$$\sin(2\pi \pm t) = \pm \sin t$$

$$\cos(2\pi \pm t) = \cos t$$

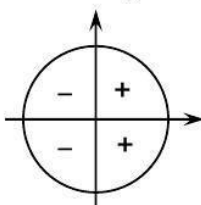
$$\operatorname{tg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t$$

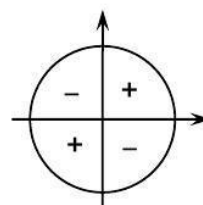
Знаки тригонометрических функций



$\sin t$



$\cos t$



$\operatorname{tg} t, \operatorname{ctg} t$

Тригонометрия

$$1. \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$2. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$3. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$4. \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$5. \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$6. \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$7. \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$8. \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$9. \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$10. \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$11. \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha};$$

$$12. \quad \sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$13. \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$14. \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$15. \quad \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

$$16. \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$17. \quad \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$18. \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta));$$

$$19. \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$20. \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$21. \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ или $\begin{cases} x_1 = \arcsin a + 2\pi n \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{cases}$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$ или $\begin{cases} x_1 = \arccos a + 2\pi n \\ x_2 = -\arccos a + 2\pi n \end{cases}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$
где $n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множество целых чисел: ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...)				

Уравнения, сводящиеся к простейшим

Практически все тригонометрические уравнения считаются «сводящимися к простейшим», но можно выделить ряд уравнений которые сводятся к простейшим достаточно просто.

Рассмотрим сначала виды простейших уравнений.

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида:

$$\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a.$$

На эти уравнения следует обратить особое внимание, так как без умения их решать невозможно решить никакое другое тригонометрическое уравнение. В ваших памятках имеются схемы решения каждого из простейших уравнений.

Примеры:

Решите уравнение и укажите корни, принадлежащие указанному промежутку:

а) $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}, x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

б) $\cos \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1, x \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right];$ в) $\operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Уравнения, являющиеся равенством двух одноименных тригонометрических функций:

а) уравнения вида $\sin f(x) = \sin \phi(x)$ равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = \phi(x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = \pi - \phi(x) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) уравнения вида $\cos f(x) = \cos \phi(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = \phi(x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = -\phi(x) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

в) уравнения вида $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} \phi(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = \phi(x) + \pi k; \\ \phi(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

Примеры:

1. Решите уравнение:

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{4});$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad \text{или} \quad x + \frac{\pi}{3} = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi m}{3};$$

$$x = \frac{\pi}{12}(1 + 24k), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{6}(5 + 24m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{12}(1 + 24k), \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{6}(5 + 24m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

2. Решите уравнение:

$$\sin 4x = -\cos x \Leftrightarrow \sin 4x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x);$$

$$4x = x + \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad \text{или} \quad 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{6}(3 + 4n), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{10} + (1 + 4k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{6}(3 + 4n), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{10} + (1 + 4k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Домашнее задание.

а) $\cos \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad [-\pi; \pi]$

б) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad [-3\pi; 3\pi]$

в) $\sin \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

г) $\cos \cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{6})$

Тригонометрические уравнения, решаемые методом подстановки.

Уравнения данного вида $\phi^2(x) + \phi(x) + c = 0$, где $\phi(x)$ – тригонометрическая функция, часто называют сводящимися к квадратным и решают методом подстановки вместо тригонометрической функции данного аргумента некоторого параметра t с учетом допустимых значений t в зависимости от области значения функции.

Примеры:

1. $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0, \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$
2. $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0, \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
3. $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0, \left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$
4. $\frac{7}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)} - 6 = 0, \left[-3\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$
5. $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{8}{\sin x} + 3 = 0, \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
6. $\cos 4x - \sin 2x = 0, [0; \pi]$

Однородные уравнения

Однородные уравнения можно разделить на группы по степени входящих в него тригонометрических функций: уравнения первой степени, второй, третьей и т.д.:

$$a\sin x + b\cos x = 0, a \neq 0, b \neq 0$$

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x \cos x + c\sin x \cos^2 x + d\cos^3 x = 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$

Из основного тригонометрического тождества следует, что синус и косинус одного и того же аргумента одновременно быть равными нулю не могут, следовательно, решаем эти уравнения путем деления обеих частей на высшую степень одной из функций.

Примеры:

1. $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x = 3\cos^2 x + 1, \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
2. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0, (0; 2\pi)$
3. $2\cos x - 3\sin x = 0, \left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$
4. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0, \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
5. $\sin^2 x + 3\sin 2x - 7\cos^2 x = 0, \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$

Уравнения, приводимые к однородным.

Сегодня мы рассмотрим неоднородные уравнения первой и второй степени:

$$a\sin x + b\cos x = c, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Начнем с уравнений второй степени. Используя основное тригонометрическое тождество, представим $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$, раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и получим однородное уравнение второй степени.

Что касается неоднородных уравнений первой степени, то здесь можно выделить три основных способа решения:

1 способ. При помощи формул двойного угла для синуса и косинуса и основного тригонометрического тождества:

$$\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}, \quad c = c(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

данное уравнение сведется к однородному уравнению второй степени.

2 способ. При помощи формул синуса и косинуса суммы (разности) аргументов.

3 способ. При помощи формул выражения функций через тангенс половинного угла:

$\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$	$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$
--	---

уравнение сведется к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Примеры:

1. $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -1, \quad \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

2. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2, \quad \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

3. $5\cos x + 12\sin x = 13$

4. $3\sin 2x + 3\cos 2x = 16\sin x \cos^3 x - 8\sin x \cos x$

При решении неоднородных уравнений второй степени помним, что

$$c = c(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Примеры:

1. $5\sin^2 x - 14\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2$

2. $3\sin^2 x - \sin x \cos x = 2$

3. $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 5$

4. $3\sin 2x + \cos 2x = 1$