

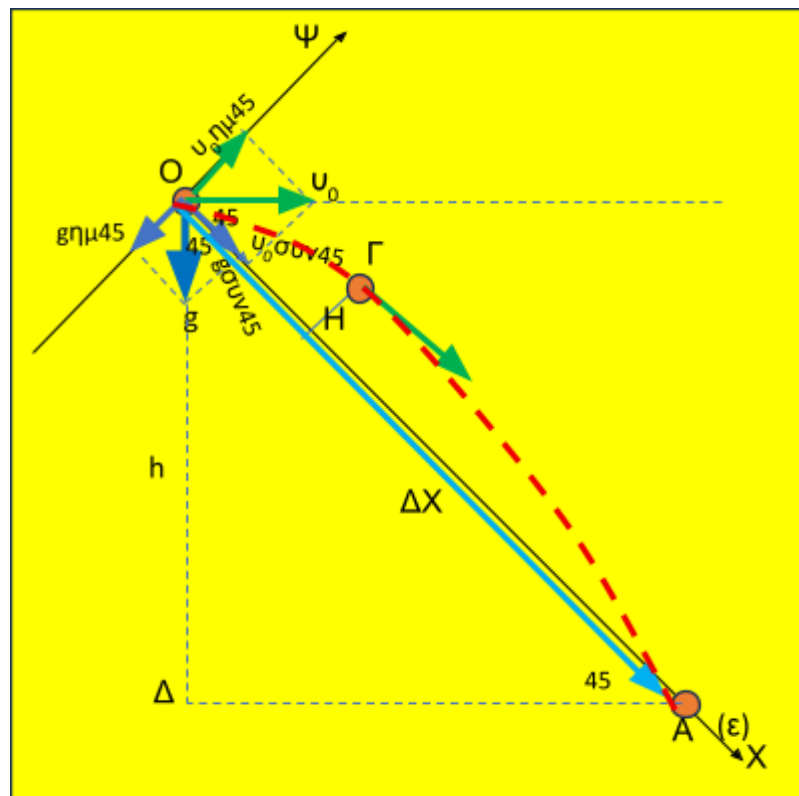
## Ξεφεύγοντας από το κλασσικό “σύστημα”...

Μικρό σώμα βάλλεται οριζόντια την  $t=0$  με ταχύτητα  $u_0=10\text{m/s}$  από σημείο  $O$  σε αρκετό ύψος, στο βαρυτικό πεδίο με  $g=10\text{m/s}^2$ .

- 1) Ποια χρονική στιγμή  $t_1$  η τροχιά του σώματος θα τμήσει την διχοτόμο (ευθεία ( $\epsilon$ )), της γωνίας που σχηματίζουν η αρχική ταχύτητα  $u_0$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας στη θέση  $O$ ;
- 2) Ποια η μετατόπιση το σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_1$ ;
- 3) Ποια η  $\max$  απόσταση του σώματος από την ευθεία ( $\epsilon$ ), μέχρι τη στιγμή  $t_1$ ;
- 4) Ποιο το έργο του βάρους αν  $m=1\text{Kg}$ , καθώς και το μέτρο της μεταβολής ορμής του σώματος μέχρι τη στιγμή  $t_1$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- 1) Θεωρώ σύστημα ορθογωνίων αξόνων ( $X, \Psi$ ) όπου  $X$  στη διεύθυνση της ευθείας ( $\epsilon$ ) και  $\Psi$  ο κάθετος σ' αυτή.



Αναλύουμε τα  $\vec{v}_0$  και  $\vec{g}$  στους δύο άξονες και γράφουμε τις εξισώσεις θέσης και ταχύτητας σ'αυτούς

$$\chi: \quad X = v_0 \sigma \nu 45t + \frac{1}{2} g \sigma \nu 45t^2 \quad (1) \quad \& \quad v_x = v_0 \sigma \nu 45 + g \sigma \nu 45t \quad (2)$$

$$\psi: \quad \Psi = v_0 \eta \mu 45t - \frac{1}{2} g \eta \mu 45t^2 \quad (3) \quad \& \quad v_\psi = v_0 \eta \mu 45 - g \eta \mu 45t \quad (4)$$

- 1) Έστω A η τομή της τροχιάς του σώματος με την ευθεία (ε).  
Στο A ισχύει :

$$\Psi = 0 \xrightarrow{(3)} 0 = v_0 \eta \mu 45t_1 - \frac{1}{2} g \eta \mu 45t_1^2 \Rightarrow t_1 = \frac{2v_0}{g} \Rightarrow t_1 = 2s$$

- 2) Η μετατόπιση την  $t_1$  εκφράζεται από το διάνυσμα  $\Delta \vec{x}$  και το μέτρο της θα υπολογιστεί από την εξίσωση (1) :

$$(1) \xrightarrow{t=2s} X = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} 2 + \frac{1}{2} 10 \frac{\sqrt{2}}{2} 2^2 \Rightarrow X = 20\sqrt{2}m$$

$$\text{Άρα : } \Delta X = 20\sqrt{2}m$$

- 3) Την max απόσταση από την ευθεία (ε) μέχρι την  $t_1$ , θα αποκτήσει το σώμα τη στιγμή που η ταχύτητά του  $v_\psi$  στον άξονα  $\Psi$  θα μηδενιστεί, δηλαδή κάθετα στον  $X$  δεν θα απομακρυνθεί άλλο απ'αυτόν.

$$(4) \xrightarrow{v_\psi=0} 0 = v_0 \eta \mu 45 - g \eta \mu 45t \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{10}{10} \Rightarrow t = 1s$$

$$(3) \xrightarrow{t=1s} H = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} 1 - \frac{1}{2} 10 \frac{\sqrt{2}}{2} 1^2 \Rightarrow H = 2,5\sqrt{2}m$$

#### 4) Για το έργο του βάρους

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $O\Delta A$  :

$$h = \Delta X \eta \mu 45 \Rightarrow h = 20\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = 20m$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν : } W_w = mgh = 1 \cdot 10 \cdot 20 \Rightarrow W_w = 200J$$

#### Για το μέτρο της μεταβολής της ορμής

Μια και η μόνη δύναμη που δρα στο σώμα είναι σταθερή και ίση με το βάρος του σώματος μπορούμε από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα να πούμε:

$$|\Delta P| = |\Sigma F| \Delta t \Rightarrow |\Delta P| = m|g| \Delta t = 1 \cdot 10 \cdot 2 \Rightarrow |\Delta P| = 20 \frac{Kgm}{s}$$

### Σχόλια

α) Επέλεξα τους συγκεκριμένους άξονες επειδή τα ερωτήματα αφορούσαν τη στιγμή που η τροχιά τέμνει την ευθεία (ε) . Εννοείται ότι το πρόβλημα λύνεται με τους κλασσικούς άξονες (οριζόντιο και κατακόρυφο) με μια μικρή σχετικά γεωμετρική δυσκολία στο 3<sup>ο</sup> ερώτημα (θα το δούμε παρακάτω στο γ)

β) Το μέτρο της μεταβολής ορμής θα μπορούσαμε να το υπολογίσουμε ως σύνθεση των  $\Delta P_x$  και  $\Delta P_y$  κοπιάζοντας. Υπολογίζουμε πρώτα τις  $u_x$  και  $u_y$  την  $t_1$  από τις εξισώσεις (2) και (4)

$$(2) \xrightarrow{t=2s} u_{1x} = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} 2 \Rightarrow u_{1x} = 15\sqrt{2} m/s$$

$$(4) \xrightarrow{t=2s} u_{1y} = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} 2 \Rightarrow u_{1y} = -5\sqrt{2} m/s$$

$$\Delta P_x = P_{1x} - P_{0x} = m u_{1x} - m v_0 \sigma \nu 45 = 15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2} Kgm/s$$

$$\Delta P_y = P_{1y} - P_{0y} = m u_{1y} - m v_0 \eta \mu 45 = -5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -10\sqrt{2} Kgm/s$$

γ) Θα προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε το 3ο ερώτημα θεωρώντας άξονα  $X$  τον οριζόντιο και άξονα  $Y$  τον κατακόρυφο.

$$X = v_0 t \quad (1) \quad \kappa \alpha l \quad v_x = v_0 \quad (2)$$

$$\Psi = \frac{1}{2}gt^2 \quad (3) \quad \kappa \alpha l \ v_\Psi = gt \quad (4)$$

$$v_{\Gamma X} = v_{\Gamma \Psi} \Rightarrow v_0 = gt_{\Gamma} \Rightarrow t_{\Gamma} = \frac{v_0}{g} = 1s$$

ΟΤΙ:

$$Από τη ν(3) \xrightarrow{t=1s} \Psi_{\Gamma} = \frac{1}{2} 10 \cdot 1^2 \Rightarrow \Psi_{\Gamma} = 5m$$

[illegible]
$$(Z\Gamma) = \sqrt{H^2 + H^2} \Rightarrow (Z\Gamma) = H\sqrt{2} \Rightarrow H = \frac{(Z\Gamma)}{\sqrt{2}} \quad (5)$$
$$(5) \Rightarrow H = \frac{(Z\Gamma)}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow H = 2,5\sqrt{2}m$$

(Σκέφτομαι αν υπάρχει συντομότερος δρόμος)

**Παντελεήμων Παπαδάκης**  
**19/9/2025**