數學(一) 第一次段考範圍:數與式

| 章節:高中數學(一)CH1-1實數、1-2式子的運算 | |
|---|---|
| 答案:(1) 8 (2) 略 | 難易度:易 |

小夫在計算紙上寫下求 $\sqrt{107}$ 的近似值的過程:

∵面積為107的正方形邊長為 $\sqrt{107}$ , 且 $10<\sqrt{107}<11$ ,

∴設 $\sqrt{107}=10+x$ , 其中 $0<x<1$ ,

如右圖, $(10+x)^2=10^2+2\times10\times x+x^2=107$ ,

若 $x^2$ 很小時省略不計, 得 $20x+100\approx107\Rightarrow x\approx0.35$ ,

即 $\sqrt{107}\approx10.35$ 。

| | 10 | $x$ |
|---|---|---|
| 10 | 100 | $10x$ |
| $x$ | $10x$ | $x^2$ |

試求:

(1) $\sqrt{76}$ 的整數部分為_____(填充題)

(2) 依照小夫的方法, 寫出求 $\sqrt{76}$ 的近似值的求解過程(非選擇題)。

【解】

(1) ∵ $64<76<81\Rightarrow8<\sqrt{76}<9$ , 故 $\sqrt{76}$ 的整數部分為8。

(2) 設 $\sqrt{76}=8+x$ , 其中 $0<x<1$ , 如圖,

$(8+x)^2=8^2+2\times8\times x+x^2=76$ ,

若 $x^2$ 很小時省略不計, 得 $16x+64\approx76\Rightarrow x\approx0.75$ ,

即 $\sqrt{76}\approx8.75$ 。

| | 8 | $x$ |
|---|---|---|
| 8 | 64 | $8x$ |
| $x$ | $8x$ | $x^2$ |

學習內容:

N-10-1實數:數線, 十進制小數的意義, 三一律, 有理數的十進制小數特徵, 無理數之十進制小數的估算( $\sqrt{2}$ 為無理數的證明), 科學記號數字的運算。

A-10-1式的運算:三次乘法公式, 根式與分式的運算。

學習表現:

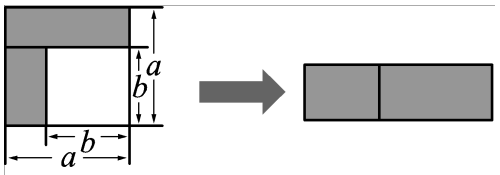
n-V-1理解實數與數線的關係, 理解其十進位表示法的意義, 理解整數、有理數、無理數的特質, 並熟練其四則與次方運算, 具備指數與對數的數感, 能用區間描述數線上的範圍, 能用實數描述現象並解決問題。

a-V-1理解多項式、分式與根式對應實數之運算規則, 理解指數、對數的運算規則, 並能用於數學推論。

數學(一) 第一次段考範圍:數與式

| 章節:高中數學(一)CH1-2式子的運算、1-3指數與常用對數 | |
|---|---|
| 答案:(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$<br>(2)15和17<br>(3) $3^{32}$ | 難易度:易 |

(1) 將圖(一)中的陰影部分裁剪下來, 重新拼成圖(二)中的矩形, 試比較兩圖中陰影部分的面積, 得到的乘法公式為　　。

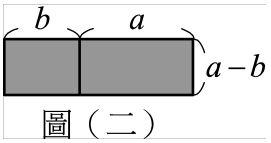



圖(一)　　圖(二)

(2) $2^{16}-1$ 可以被10和20之間某兩個數整除, 則這兩個數分別為　　。

(3) 試求: $2\times(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1=$　　。

【解】




圖(二)

(1) 圖(一)中的陰影面積為 $a^2-b^2$,

圖(二)中的陰影面積為 $(a+b)(a-b)$,

故乘法公式為 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

(2) $2^{16}-1=(2^8-1)(2^8+1)=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\ =(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\ =3\times5\times17\times257$。

在10和20之間的兩數為15和17。

(3) $2\times(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1$

$=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1\ =(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1$

$=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1\ =(3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1$

$=(3^{16}-1)(3^{16}+1)+1\ =(3^{32}-1)+1\ =3^{32}$。

學習內容:

A-10-1式的運算:三次乘法公式, 根式與分式的運算。

N-10-3指數:非負實數之小數或分數次方的意義, 幾何平均數與算幾不等式, 複習指數律, 實數指數的意義, 使用計算機的$x^y$鍵。

N-10-4常用對數:log的意義, 常用對數與科學記號連結, 使用計算機的$10^x$鍵和log鍵。

學習表現:

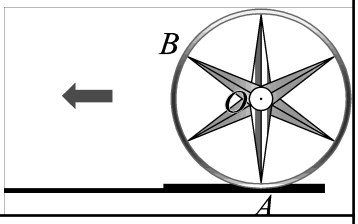
n-V-1理解實數與數線的關係, 理解其十進位表示法的意義, 理解整數、有理數、無理數的特質, 並熟練其四則與次方運算, 具備指數與對數的數感, 能用區間描述數線上的範圍, 能用實數描述現象並解決問題。

數學(三)A、B 第一次段考範圍:三角函數、三角函數的週期現象

章節:高中數學(三)A CH1-1 弧度量與三角函數
高中數學(三)B CH1-1 弧度量與三角函數

答案:126公分 | 難易度:易

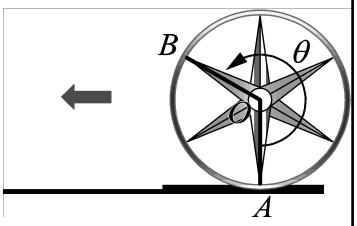
董仔在路上看到一台跑車的輪框, 如圖, 若輪框的軸心為$O$, 半徑為30公分, 且弧$\overset{\frown}{AB}$所對的圓心角為$120°$。現$A$點置於地面, 跑車向左方前進, 即車輪逆時針滾動, 試求當$A$點第一次滾動到$B$點的位置時, 此時車輪向左滾動了多少公分?(四捨五入到整數位)




【解】

如圖, 車輪滾動了$\theta = 240° = \frac{4\pi}{3}$,

故車輪向左滾動了$30 \times \frac{4\pi}{3} = 40\pi = 125.6\ldots \approx 126$(公分)。




學習內容:
N-11A-1弧度量:弧度量的定義, 弧長與扇形面積, 計算機的rad鍵。
F-11A-1三角函數的圖形:sin、cos、tan函數的圖形、定義域、值域、週期性, 週期現象的數學模型。(cot、sec、csc之定義與圖形)
N-11B-1弧度量:弧度量的定義, 弧長與扇形面積, 計算機的rad鍵。

學習表現:
n-V-7認識弧度量並能操作, 理解並欣賞其作為角之度量的簡潔性。
n-V-2能熟練操作計算機, 能判斷使用計算機的時機, 理解計算機可能產生誤差, 並能處理誤差。
f-V-3認識三角函數的圖形特徵, 理解其特徵的意義, 認識以正弦函數為數學模型的週期性現象, 並能用以溝通和解決問題。
g-V-2理解並欣賞坐標平面上的圖形對稱性, 並能用以溝通及推論。

數學(三)A 第一次段考範圍:三角函數

| 章節:高中數學(三)A CH1-2 三角的和差角公式、CH1-4 正餘弦的疊合 | |
|---|---|
| 答案: $2\sin(\omega t-\frac{\pi}{3})$ | 難易度:中 |

皮卡丘的絕招十萬伏特是瞬間增壓發出的高壓電,交流變壓器是常見的增壓方式。而我們日常生活中所使用的電就是交流電。交流電常見的波型為正弦波。今有兩頻率相同的交流電分別為 $i_1=\sin(\omega t)$ 、$i_2=\sqrt{3}\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})$ ,試求兩電流函數疊加之後的總電流函數。



【解】

$$i_1+i_2=\sin(\omega t)+\sqrt{3}\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

$$=\sin(\omega t)+\sqrt{3}[\sin(\omega t)\cos\frac{\pi}{2}-\cos(\omega t)\sin\frac{\pi}{2}]$$

$$=\sin(\omega t)+\sqrt{3}[\sin(\omega t)\times 0-\cos(\omega t)\times 1]$$

$$=\sin(\omega t)-\sqrt{3}\cos(\omega t)$$

$$=2[\sin(\omega t)\times\frac{1}{2}-\cos(\omega t)\times\frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$=2[\sin(\omega t)\cos\frac{\pi}{3}-\cos(\omega t)\sin\frac{\pi}{3}]$$

$$=2\sin(\omega t-\frac{\pi}{3})$$ 。

學習內容:

G-11A-5三角的和差角公式:正弦與餘弦的和差角、倍角與半角公式。

F-11A-2正餘弦的疊合:同頻波疊合後的頻率、振幅。

學習表現:

s-V-1理解三角比的意義,熟練其彼此關係與運算操作,能靈活應用於等式或函數,並能用以推論及解決問題。

g-V-4理解並欣賞幾何的性質可以透過坐標而轉化成數與式的關係,而數與式的代數操作也可以透過坐標產生對應的幾何意義,能熟練地轉換幾何與代數的表徵,並能用於推論及解決問題。

f-V-3認識三角函數的圖形特徵,理解其特徵的意義,認識以正弦函數為數學模型的週期性現象,並能用以溝通和解決問題。

s-V-1理解三角比的意義,熟練其彼此關係與運算操作,能靈活應用於等式或函數,並能用以推論及解決問題。

選修數學(甲)上 第一次段考範圍:數列的極限

章節:選修數學(甲)上 CH1-1 無窮數列的極限

答案:(5)　　難易度:易




網路盛傳:根據瑪雅曆法,日子只到2012年12月21日就停止了,太陽在這一天將與銀河系的中心對齊,即人們在地平線上看到太陽處於最低點。當這一天來臨,地球將發生劇烈搖晃,災難四起,地球徹底毀滅,人類將走到盡頭。下列數列 $\langle a_n \rangle$ 中,

(1) $\langle a_n \rangle = 2012n$　(2) $\langle a_n \rangle = \dfrac{2012}{4n^2-1}$　(3) $\langle a_n \rangle = (-1)^n \times 2012$

(4) $\langle a_n \rangle = \dfrac{2012n^2+1}{2012n^2-1}$　(5) $\langle a_n \rangle = 2012 + \dfrac{1}{n}$ (單選)

【解】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} 2012n$ 不存在。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2012}{4n^2-1} = 0$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \times 2012$ 不存在。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2012n^2+1}{2012n^2-1} = 1$。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} 2012 + \dfrac{1}{n} = 2012$。

故選(5)。

學習內容:

N-12甲-1數列的極限:數列的極限,極限的運算性質,夾擠定理。從連續複利認識常數$e$。

學習表現:

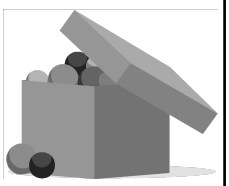
n-V-8認識無窮的概念,理解並欣賞數學掌握無窮的方法。

n-V-2能熟練操作計算機,能判斷使用計算機的時機,理解計算機可能產生誤差,並能處理誤差。

選修數學(甲)上 第一次段考範圍:數列的極限

章節:選修數學(甲)上 CH1-2 數列極限的應用

答案:(1)(2)(4)　　難易度:難



已知紅箱內有5個紅球, 3個白球, 白箱內有3個紅球, 5個白球, 所有球的大小及形狀皆完全相同。第一次從紅箱內取出一球後放回原箱, 第二次從與第一次取出的球顏色相同的箱子內取出一球後放回原箱。依此類推, 第 $k+1$ 次從與第$k$次取出的球顏色相同的箱子內取出一球後放回原箱。若第$n$次取出的球是紅球的機率記為 $p_n$, 數列 $\langle p_n \rangle$ 的前項和記為 $S_n$, 下列何者正確?(多選)

(1) $p_2=\frac{17}{32}$　(2) $p_n=\frac{5}{8}p_{n-1}+\frac{3}{8}(1-p_{n-1})$　(3) $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{3}{5}$　(4) $S_n=\frac{1}{6}[3n+1-(\frac{1}{4})^n]$

(5) $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

【解】

(1) $p_1=\frac{5}{8}$、$p_2=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{17}{32}$。

(2) 第$n$次取出的球是紅球的機率為第 $n-1$ 次取出紅球且第$n$次在紅箱中取出紅球或第 $n-1$ 次取出白球且第$n$次在白箱中取出紅球 $\Rightarrow p_n=\frac{5}{8}p_{n-1}+\frac{3}{8}(1-p_{n-1})$。

(3) $p_n=\frac{5}{8}p_{n-1}+\frac{3}{8}(1-p_{n-1})=\frac{1}{4}p_{n-1}+\frac{3}{8}$, 令 $p_n-\alpha=\frac{1}{4}(p_{n-1}-\alpha)$

$\Rightarrow p_n=\frac{1}{4}p_{n-1}+\frac{3}{4}\alpha \Rightarrow \frac{3}{4}\alpha=\frac{3}{8} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$,

故 $p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(p_{n-1}-\frac{1}{2})$

$p_{n-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(p_{n-2}-\frac{1}{2})$

$\vdots$

$\times)\ p_2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(p_1-\frac{1}{2})$

$p_n-\frac{1}{2}=(\frac{1}{4})^{n-1}(p_1-\frac{1}{2}) \Rightarrow p_n=(\frac{1}{4})^{n-1}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$, 故 $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$。

(4) $S_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{4})^{k-1}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{4})^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\times\frac{1[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}+\frac{n}{2}=\frac{1}{6}[1-(\frac{1}{4})^n]+\frac{n}{2}$

$=\frac{1}{6}[3n+1-(\frac{1}{4})^n]$。

(5) $\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在。

| |
|---|
| 學習內容:<br>N-12甲-1數列的極限:數列的極限, 極限的運算性質, 夾擠定理。從連續複利認識常數*e*。<br>N-12甲-2無窮等比級數:循環小數, Σ符號。 |
| 學習表現:<br>n-V-8認識無窮的概念, 理解並欣賞數學掌握無窮的方法。<br>n-V-2能熟練操作計算機, 能判斷使用計算機的時機, 理解計算機可能產生誤差, 並能處理誤差。 |