Agro Véto 2016
Résolution de problème

A.1.1. Une ligne de courant est une courbe tangente aux vecteurs vitesses en tout point.
Un écoulement est incompressible lorsque la masse volumique du fluide est considérée identique en tout point de l'écoulement.
Dans un écoulement laminaire, les lignes de courant ne se croisent pas, elles sont parallèles, ce qui n'est pas le cas dans un écoulement turbulent.
Le nombre de Reynolds pour une conduite cylindrique a pour expression :

$$R_e = \frac{\rho v_{moy} \times 2R}{\eta}$$

v_{moy} est la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section droite, ρ est la masse volumique du fluide, R est le rayon de la conduite et η la viscosité dynamique du fluide.
Le régime est laminaire si $\mathcal{R}_e < 2000$ environ, turbulent sinon.

A.1.2. Le débit volumique est le volume qui traverse une section droite par unité de temps :

$$Q_v = \frac{\delta V}{dt} = \iint v dS$$

Le débit massique est la masse qui traverse une section droite par unité de temps :

$$Q_m = \frac{\delta m}{dt} = \iint \rho v dS$$

Pour établir le bilan de masse, on s'intéresse au système fermé suivant :

- A l'instant t, le système fermé $sf(t)$ est constitué du fluide dans une surface de contrôle Σ_o et de la masse élémentaire entrant dans Σ_o pendant dt :

$$m(sf(t)) = m(\Sigma_o) + \delta m_e$$

- A l'instant $t + dt$, le système fermé $sf(t + dt)$ est constitué du fluide dans la même surface de contrôle Σ_o et de la masse élémentaire sortant de Σ_o pendant dt :

$$m(sf(t + dt)) = m(\Sigma_o) + \delta m_s$$

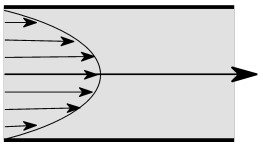
En régime permanent, la masse du système fermé est constante et ainsi, la masse entrante est égale à la masse sortante :

$$\delta m_e = \delta m_s$$

Le débit massique et le débit volumique sont proportionnels pour un écoulement incompressible :

$$Q_m = \frac{\delta m}{dt} = \iint \rho v dS = \rho \iint v dS = \rho Q_v$$

A.1.3. L'écoulement est laminaire et les lignes de courant ne se croisent pas. On se place ainsi dans le cas d'un écoulement unidimensionnel : la vitesse ne dépend que d'un paramètre. Dans une conduite cylindrique, la vitesse dépendra donc de la coordonnée radiale.
Le fluide se met en mouvement si les forces de pression en entrée ($P_e \times S$) sont supérieures à celle en sortie ($P_s \times S$), ce qui justifie $\Delta P > 0$.
A.1.4. Le phénomène d'adhérence aux parois permet d'écrire la condition aux limites : $v(R) = 0$.



A.1.5. Exprimons le débit volumique élémentaire à travers un anneau compris entre r et $r + dr$:

$$\delta Q_v = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta P}{L}\left(R^2 - r^2\right) \times 2\pi r dr$$

On intègre pour avoir le débit volumique total :

$$Q_v = \int \delta Q_v = \int_0^R \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta P}{L}\left(R^2 - r^2\right) \times 2\pi r dr = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta P}{L} 2\pi R^2 \int_0^R r dr - \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta P}{L} 2\pi \int_0^R r^3 dr$$

$$Q_v = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta P}{L} 2\pi \left(R^2 \times \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta P}{L} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{8L\eta}\Delta P$$

Par définition, la vitesse moyenne est donnée par : $Q_v = v_{moy} \times \pi R^2$ donc :

$$v_{moy} = \frac{R^2}{8L\eta}\Delta P$$

A.1.6. La résistance hydraulique du tube est par définition la capacité du milieu à empêcher l'écoulement du fluide, elle est égale au rapport entre la différence de pression et le débit volumique :

$$R_{Hy} = \frac{\Delta P}{Q_v}$$

Nous déduisons de la question précédente :

$$R_{Hy} = \frac{8L\eta}{\pi R^4}$$

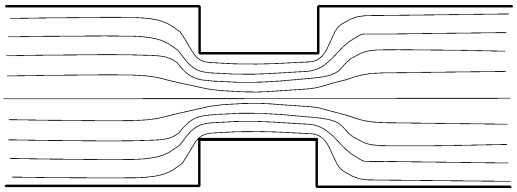
A.1.7. $v_{moy} = \frac{R^2}{8L\eta}\Delta P = \frac{\left(6.10^{-3}\right)^2}{8\times8.10^{-2}\times6.10^{-3}}\times40 = 0,375\ m.s^{-1}$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est :

$$R_e = \frac{\rho v_{moy}\times 2R}{\eta} = \frac{1,06.10^3\times0,375\times2\times6.10^{-3}}{6.10^{-3}} = 795$$

L'écoulement est laminaire, ce qui est une des conditions d'application de la loi de Poiseuille.

A.2.1.



A.2.2.L'écoulement est incompressible, il y a donc conservation du débit volumique. Les trois tronçons étant associés en série, nous pouvons écrire :

$$Q_V = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

Or, $Q_v = v_{moy}S$ donc plus la section S est faible, plus la vitesse est élevée : la vitesse moyenne au niveau de la zone sténosée est plus élevée, ce qui justifie le fait que les lignes de courant se resserrent à ce niveau-là.

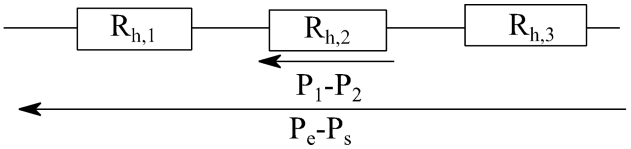
Remarque : le terme débit total est trompeur…

A.2.3. En utilisant l'expression donnée dans la question A.1.6., on peut écrire :

$$R_{h,tot} = \frac{P_e - P_s}{Q_V}$$

Comme les trois tronçons sont en série, $R_{h,tot} = R_{h,1} + R_{h,2} + R_{h,3}$

A.2.4. On peut utiliser l'analogue du diviseur de tension (avec des différences de pression positives) :



$$R_{h,2} = R_{h,tot}\frac{P_1 - P_2}{P_e - P_s}$$

Soit, en exprimant les différences de pression de l'énoncé :

$$R_{h,2} = R_{h,tot}\frac{P_2 - P_1}{P_s - P_e}$$

A.2.5. Utilisons les questions précédentes ainsi que l'expression de la question A.1.6. :

$$R_{h,2} = R_{h,tot}\frac{P_1 - P_2}{P_e - P_s}$$

$$R_{h,2} = \left(R_{h,1} + R_{h,2} + R_{h,3}\right)\frac{P_1 - P_2}{P_e - P_s}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{Q_V} = \left(\frac{8L\eta}{\pi R^4} + \frac{8L_s\eta}{\pi R_s^4} + \frac{8L\eta}{\pi R^4}\right)\frac{P_1 - P_2}{P_e - P_s}$$

$$\frac{1}{v_{moy,2}\times\pi R_s^2}=\left(\frac{8L\eta}{\pi R^4}+\frac{8L_s\eta}{\pi R_s^4}+\frac{8L\eta}{\pi R^4}\right)\frac{1}{P_e-P_s}$$

$$v_{moy,2}\times\pi R_s^2=\frac{P_e-P_s}{\frac{16L\eta}{\pi R^4}+\frac{8L_s\eta}{\pi R_s^4}}$$

$$v_{moy,2}=\frac{P_e-P_s}{\left(\frac{16L\eta}{\pi R^4}+\frac{8L_s\eta}{\pi R_s^4}\right)\times\pi R_s^2}=\frac{P_e-P_s}{8\eta R_s^2\left(\frac{2L}{R^4}+\frac{L_s}{R_s^4}\right)}$$

$$v_{moy,2}=\frac{40}{8\times6.10^{-3}\times\left(2.10^{-3}\right)^2\left(\frac{8.10^{-2}}{\left(6.10^{-3}\right)^4}+\frac{1.10^{-2}}{\left(2.10^{-3}\right)^4}\right)}=\frac{40}{8\times6\times2^2\times\frac{10^{-2}}{10^{-3}}\left(\frac{8}{6^4}+\frac{1}{2^4}\right)}=0,3\ m.s^{-1}$$

Le nombre de Reynolds dans la partie sténosée est :

$$R_e=\frac{1,06.10^3\times v_{moy,2}\times2\times2.10^{-3}}{6.10^{-3}}=214$$

Par ailleurs, dans la partie non sténosée :

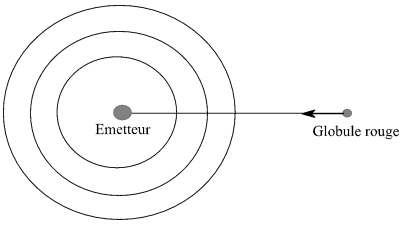
$$v_{moy}\times\pi R^2=v_{moy,2}\times\pi R_s^2$$

$$v_{moy}=v_{moy,2}\times\frac{R_s^2}{R^2}=v_{moy,2}\times\frac{(2)^2}{(6)^2}=0,03\ m.s^{-1}$$

$$R_e=\frac{1,06.10^3\times0,0,3\times2\times6.10^{-3}}{6.10^{-3}}=64$$

Dans les deux cas, l'écoulement est laminaire, ce qui valide l'utilisation de la loi de Poiseuille. Dans la partie sténosée, le nombre de Reynolds est plus important, le transport de quantité de mouvement par diffusion (effet de la viscosité) est plus faible ; localement, il pourra y avoir des turbulences, qui peuvent être détectées par échographie Doppler (distribution des vitesses différentes).

B.1.1.



B.1.2. Le décalage en fréquence est positif lorsque émetteur et récepteur se rapprochent.

B.1.3. Nous sommes dans la situation de la figure B.1.1. : la vitesse relative de l'onde sonore par rapport au récepteur est égale à $c+v$. La durée entre deux maxima succesifs est le temps nécessaire pour parcourir la longueur d'onde $\lambda_0=cT_0$ (cette longueur d'onde n'est pas modifiée car la source est fixe) :

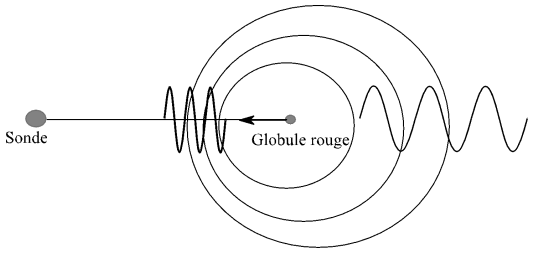
$$\Delta t_1=\frac{\lambda_0}{c+v}=\frac{cT_0}{c+v}$$

La fréquence apparente de l'onde perçue par l'hématie est ainsi :

$$f_1=\frac{1}{\Delta t_1}=\frac{1}{T_0}\frac{c+v}{c}=f_0\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

Remarque : la formulation de l'énoncé est maladroite: on dirait que la durée dépend du référentiel dans lequel on se place !

B.1.4. La source (hématie) est en mouvement et se rapproche du récepteur (sonde) : la longueur séparant deux maxima successifs (longueur d'onde) est diminuée de la longueur parcourue par la source pendant une période T_1 de l'onde :



$$\lambda_2=\lambda_1-vT_1$$

$$\Delta t_2=\frac{\lambda_1-vT_1}{c}=T_1\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

$$f_2 = \frac{1}{\Delta t_2} = f_1 \frac{1}{1-\frac{v}{c}}$$

B.1.5. Comme $v << c$, on peut faire un développement limité à l'ordre 1 en prenant l'équivalent :

$$\frac{1}{1-\frac{v}{c}} \approx 1 + \frac{v}{c}$$

$$f_2 = f_1\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

B.1.6. D'après les questions précédentes, nous obtenons :

$$f_2 = f_1\left(1 + \frac{v}{c}\right) = f_0\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2$$

On prend à nouveau l'équivalent d'ordre 1 et on obtient :

$$f_2 = f_0\left(1 + 2\frac{v}{c}\right)$$

Lorsque la sonde et l'hématie n'évoluent pas selon un même axe, seule la composante axiale est à prendre en compte, on remplace donc v par $vcos\theta$ dans l'expression précédente :

$$f_2 = f_0\left(1 + 2\frac{vcos\theta}{c}\right)$$

Remarque : le signe moins de l'énoncé n'est pas cohérent avec la figure 3.

AN :

$$\frac{f_2 - f_0}{f_0} = 2\frac{vcos\theta}{c}$$

$$v = c\frac{1}{2cos\theta}\frac{f_2 - f_0}{f_0} = 1,5.10^3 \times \frac{1}{2\times cos(20)} \times \frac{2,0}{4,0.10^3} = 0,4\ m.s^{-1}$$

En pratique, un médecin ne peut obtenir une vitesse aussi précise car il ne peut maintenir l'angle θ tout à fait constant.

B.1.7. La vitesse des hématies renseigne sur celle de l'écoulement sanguin et permet de détecter des sténoses, puisqu'à ce niveau, la vitesse du sang augmente.

Remarque : Ce type de question concernerait plutôt les étudiants de PACES ou d'étudiants qui ont déjà intégré Véto….

B.1.8. Aucun signal signifie que l'onde ne rencontre aucune paroi mobile ou que l'incidence est normale. Un signal avec un spectre de fréquence très dispersé signifie que l'onde est réfléchie par des particules de vitesses très différentes (qui peut être caractéristique d'un écoulement turbulent). A l'inverse, lorsque le spectre est étroit, les particules réfléchissant l'onde ont toutes la même vitesse.

B.2.

Remarque : La notation $f(t)$ pour une fonction sinusoïdale est maladroite, il était question de fréquence f juste avant. De plus, le ω_0 de 2.3 n'a rien à voir avec le f_0 de la fonction f ni avec le f_0 de la partie précédente ! A-t-on besoin d'utiliser des notations qui prêtent à confusion ?

B.2.1. La notation complexe permet d'utiliser les lois et théorèmes vus en régime continu (lois de Kirchhoff, diviseur de tensions, de courant….). Pour un dipôle traversé par un courant associé à l'intensité complexe $\underline{i}$ et aux bornes duquel une tension associée à $\underline{u}$, on définit l'impédance complexe par :

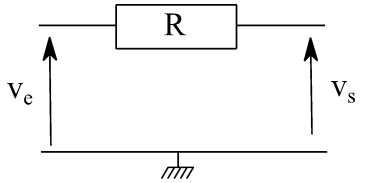
$$\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$$

B.2.2.

$$U_m = Z_m \times I_m$$

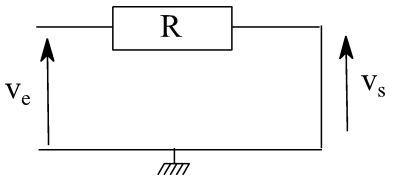
L'impédance réelle d'un condensateur est donnée par $Z_m = \frac{1}{C\omega}$, avec $\omega = 2\pi f$

- A basse fréquence, $Z_m \to \infty$ donc $I_m = \frac{U_m}{Z_m} \to 0$: le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert :



et ainsi $\underline{v_s} = \underline{v_e} + R\underline{i_e} = \underline{v_e}$: $\underline{H} = 1$.

- A haute fréquence, $Z_m \to 0$ donc $U_m = Z_m \times I_m \to 0$: le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé :



et ainsi $\underline{v_s} = \underline{0}$: $\underline{H} = 0$.

Le filtre proposé est donc un filtre passe-bas, utile pour isoler le signal décrivant la vitesse des hématies, signal de fréquence $|f_0 - f_2|$ de fréquence plus basse que le signal de fréquence $f_0 + f_2$.

B.2.3.

En utilisant le diviseur de tension :

$$\underline{v_s} = \underline{v_e}\frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C}+\underline{Z_R}} = \underline{v_e}\frac{1}{1+\frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_C}}} = \underline{v_e}\frac{1}{1+RC\omega j}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1+RC\omega j}$$

Par identification avec l'expression de l'énoncé, on a $a = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Remarque : Le filtre étudié ici est simple mais selon le programme, les fonctions de transfert n'ont pas à être déterminées…. Les étudiants doivent savoir en revanche exploiter une fonction de transfert donnée. De plus, « exprimer » aurait été préférable à « Calculer »…

B.2.4. $G = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$.

B.2.5. Cherchons la pulsation de coupure ω_c du filtre telle que $G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc telle que :

$$1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = 2$$

$$\omega_c = \omega_0$$

Si $\omega < \omega_0$, le filtre laissera passer le signal. On ne veut laisser passer que le signal de fréquence $|f_0 - f_2|$ donc on doit avoir $2\pi|f_0 - f_2| < \omega_0$.

A.N. $f_c = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\times 3.10^3\times 20.10^{-9}} = 2653\ Hz = 2,7\ kHz$

Si on compare à la valeur de $|f_0 - f_2| = 2,0\ kHz$ donnée dans la partie précédente, on a bien : $|f_0 - f_2| < f_c$.

B.3.

Remarque : les questions suivantes ne devraient-elles pas relever davantage d'exercice guidé, que de questions qui semblent être des questions de cours ? L'énoncé introduit des impédances négatives : ce genre de subtilité sont-elles nécessaires à nos étudiants de BCPST ? D'autant plus qu'ensuite, les impédances Z_1 et Z_2 sont définies pour une onde se propageant dans le sens des x croissants donc sont prises positives.

On suppose que la masse volumique des milieux n'est pas modifiée lors de la traversée de l'onde. L'énoncé ne se donne pas la peine de préciser cette hypothèse : attendait-t-on des étudiants qu'ils la formulent ?

B.3.1. $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi}} = \frac{1}{\sqrt{1000\times 4,5.10^{-10}}} = 1491\ m.s^{-1}$

$$Z = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi}} = \sqrt{\frac{1000}{4,5.10^{-10}}} = 1,5.10^6\ kg.m^{-2}.s^{-1}$$

B.3.2. Il y a conservation du débit volumique au niveau du dioptre : la vitesse de l'onde est donc continue ; le principe fondamental de la dynamique sur le dioptre supposé de masse négligeable entraîne la continuité des surpressions.

Remarque : Cette question est totalement HP à mes yeux.

B.3.3. On traduit les continuités des vitesses et des surpressions en $x = 0$ et en allégeant les notations :

$$u_i - u_r = u_t$$
$$p_i + p_r = p_t$$
$$Z_1 u_i + Z_1 u_r = Z_2 u_t$$
$$Z_1 u_i + Z_1 u_r = Z_2\left(u_i - u_r\right)$$
$$\left(Z_1 + Z_2\right)u_r = \left(Z_2 - Z_1\right)u_i$$
$$R = \left|\frac{u_r}{u_i}\right|^2 = \left|\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right|^2$$
$$T = 1 - R = \frac{4Z_1 Z_2}{\left(Z_1 + Z_2\right)^2}$$

B.3.4. Pour l'interface air-tissu, $Z_1 = 400\ kg.m^2.s^{-1} \ll Z_2 = 1,5.10^6\ kg.m^2.s^{-1}$ donc $R \approx 1$ et $T \approx 0$. Les ondes se sont pas transmises dans les tissus, qu'il n'est donc pas possible d'explorer : il convient donc d'éviter toute couche d'air entre la sonde échographique et la peau.

B.3.5. Le gel est utile pour éviter la présence d'air entre la peau et la sonde et pour permettre aux ondes de passer dans le milieu biologique.
Pour obtenir une image d'un organe interne, il faut que le coefficient de transmission T gel-peau soit le plus grand possible. On cherche alors le maximum de T en fonction de Z_1 (impédance du gel).

$$\frac{dT}{dZ_1} = 4Z_2\left(\frac{Z_2 - Z_1}{\left(Z_1 + Z_2\right)^3}\right)$$

$\frac{dT}{dZ_1} = 0$ lorsque $Z_1 = Z_2$.
Pour avoir une bonne transmission, il faut que le gel ait une impédance proche du milieu biologique :
$Z_{gel} \approx Z_{tis} \approx 1,5.10^6\ kg.m^{-2}.s^{-1}$.