Chapitre 2
Nombres complexes, partie géométrique

I. Représentation dans le plan complexe

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Définition 1
Soient a et b deux nombres réels.

- À tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point M de coordonnées $(a\,;b)$ et le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,;b)$
- À tout point $M(a\,;b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a\,;b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.

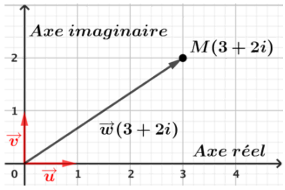
On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Exemple

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE**

Le point $M(3\,;2)$ a pour affixe le nombre complexe
$z = 3 + 2i$

De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z = 3 + 2i$



Propriété 1
$M\left(z_M\right)$ et $N\left(z_N\right)$ sont deux points du plan.
$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}\left(z'\right)$ sont deux vecteurs du plan.
a. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$
b. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$
c. Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz
d. Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe

$$z_I = \frac{z_M + z_N}{2}$$

Démonstration

a. On pose $M\left(x_M\,;y_M\right)$ et $N\left(x_N\,;y_N\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\left(x_N - x_M\,;y_N - y_M\right)$ donc son affixe est égal à

$$x_N - x_M + i\left(y_N - y_M\right) = x_N + iy_N - \left(x_M + iy_M\right) = z_N - z_M$$

b. et **c.** Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.
d. Il suffit de remarquer que

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NI}$$

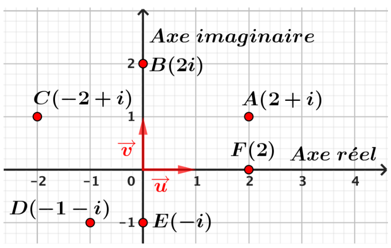
Or, I étant le milieu du segment $[MN]$,

$$\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} = \vec{0}$$

Donc

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2}$$

On peut alors conclure en utilisant **b.** et **c.**

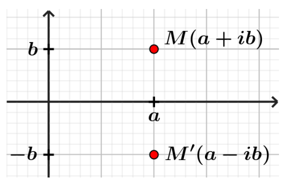


Autres exemples

Voir ci-contre

Remarque

- Les points M et M' d'affixes z et $\bar{z}$ sont **symétriques par rapport à l'axe réel**.



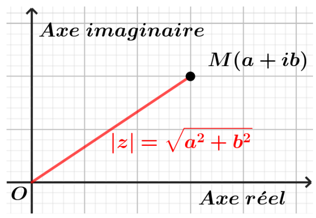
II. Module et argument d’un nombre complexe

1. Module

Définition 2

Soient $a, b \in R$. On pose $z = a + ib$. On appelle **module** de z le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Remarques

Si M est un point d'affixe z, alors le module de z est égal à la distance OM.

$$|z| = OM$$

Si $z \in R$, $|z|$ est la valeur absolue de z.

Propriété 2

Soit $z \in C$,

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad |\bar{z}| = |z| \quad |-z| = |z|$$

Preuve

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Propriété 3

Soient $z, z' \in C$, soit $n \in N$.

Opération	**Module**
Produit	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$
Puissance	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n\ si\ (z; n) \neq (0; 0)$
Inverse	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}\ si\ z \neq 0$
Quotient	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}\ si\ z' \neq 0$

Preuve

Soient $z, z' \in C$.

- **Produit**

$|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = zz' \times \bar{z}\,\overline{z'} = z \times \bar{z} \times z' \times \overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2 = (|z| \times |z'|)^2$

Or, $|z|$, $|z'|$ et $|zz'|$ sont positifs, donc

$$|zz'| = |z||z'|$$

- **Puissance**

On démontre par récurrence la proposition $P(n)$: « $|z^n| = |z|^n$ »

Initialisation

$P(0)$ est trivialement vraie si $z \neq 0$. $P(1)$ est vraie de toute évidence.

Hérédité

Supposons que $P(k)$ soit vraie et montrons $P(k + 1)$

$$|z^k| = |z|^k$$

D’après la propriété précédente,

$$|z^{k+1}| = |z^k z| = |z^k||z| = |z|^k|z| = |z|^{k+1}$$

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ si $z \neq 0$ et pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

$$\forall z \in C, n \in N, (z; n) \neq (0; 0) \Longrightarrow \left|z^n\right| = |z|^n$$

- **inverse**

$$\forall z \in C^{\times}, \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Donc, d'après la première propriété,

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right| = \left|\frac{1}{a^2+b^2}\right| \times |a - ib| = \frac{1}{a^2+b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

- **Quotient**

$$\forall \left(z; z^{'}\right) \in C \times C^{\times}, \left|\frac{z}{z^{'}}\right| = \left|z \times \frac{1}{z^{'}}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z^{'}}\right| = |z| \times \frac{1}{\left|z^{'}\right|} = \frac{|z|}{\left|z^{'}\right|}$$

Méthode

Calculer le module d'un nombre complexe

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4**

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/i85d2fKv34w**

Calculer

$a = |3 - 2i|$ $b = |\overline{- 3i}|$ $c = \left|\sqrt{2} + i\right|$ $d = \left|\frac{-3i}{\left(\sqrt{2}+i\right)^2}\right|$

Solution

$a = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (- 2)^2} = \sqrt{13}$

$b = |\overline{- 3i}| = |- 3i| = |- 3||i| = 3 \times 1 = 3$

$c = \left|\sqrt{2} + i\right| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

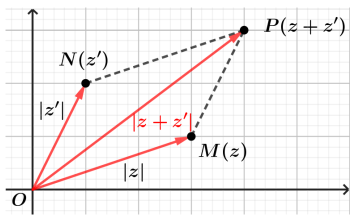
$d = \left|\frac{-3i}{\left(\sqrt{2}+i\right)^2}\right| = \frac{|-3i|}{\left|\left(\sqrt{2}+i\right)^2\right|} = \frac{|-3i|}{\left|\sqrt{2}+i\right|^2} = \frac{3}{\sqrt{3}^2} = 1$

Inégalité triangulaire

Soit z et $z^{'}$ deux nombres complexes.

$$\left|z + z^{'}\right| \leq |z| + \left|z^{'}\right|$$

L'**égalité** à lieu s'il existe $k \in R_+$ tel que $z^{'} = kz$



Démonstration

Il s'agit d'une traduction algébrique de l'inégalité triangulaire.

Soient les points $M(z), N\left(z^{'}\right), P\left(z + z^{'}\right)$. D'après l'inégalité triangulaire et l'égalité du parallélogramme,

$$OP \leq OM + MP \Longleftrightarrow OP \leq OM + ON \Longleftrightarrow \left|z + z^{'}\right| \leq |z| + \left|z^{'}\right|$$

Le cas d'égalité a lieu si $M, N \in [OP] \Longleftrightarrow \vec{OM}$ *et* $\vec{OM}$ *sont colinéaires et de même sens* $\Longleftrightarrow \exists\, k \in R_+, z^{'} = kz$

2. Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

L'ensemble des points du plan complexe $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ dont l'affixe appartient au cercle de centre O et de rayon 1 est noté $\mathbb{U}$. Ce cercle s'appelle le **cercle trigonométrique**.

Propriété 4

Soient $a, b \in R$,

$$z = a + ib \in U \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

Propriété 5

Soient z, $z^{'} \in U$,

$$zz^{'} \in U$$

$$z \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{z} \in U$$

$$z^{'} \neq 0 \Longrightarrow \frac{z}{z^{'}} \in U$$

Preuve

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/XTNKoNfFopw**

Soient z, $z^{'} \in U$,

$$|zz'| = |z||z'| = 1\times 1 = 1 \Longrightarrow zz' \in U$$

On dit que **$\mathbb{U}$ est stable par produit**.
Par ailleurs, si $z\neq 0$,

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{z} \in U$$

On dit que **$\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse**.

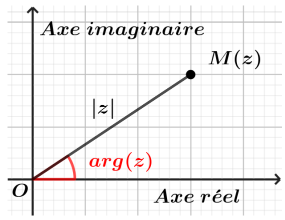
Supposons $z' \neq 0$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow \frac{z}{z'} \in U$$

On dit que **$\mathbb{U}$ est stable par quotient**.

3. Argument

Définition 3
Soit un point M d'affixe z non nulle. On appelle **argument** de z, noté $arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.



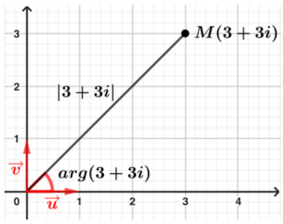
Remarques

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme
$$\arg arg\,(z) + 2k\pi,\ k\in Z$$
On notera arg $arg\,(z)$ $modulo$ 2π ou arg $arg\,(z)\ [2\pi]$
- 0 n'a pas d'argument car, dans ce cas, l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas défini.

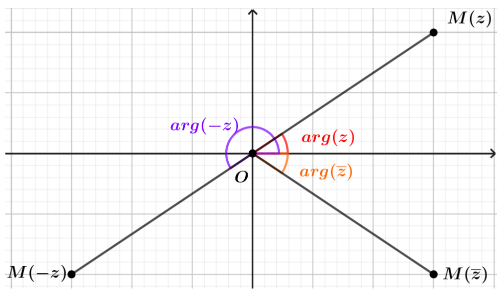
Exemple
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4**
Soit $z = 3 + 3i$

$|z| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

arg $arg\,(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$



Propriété 6
Soit z un nombre complexe non nul.
a. $z\in R^{\times} \Leftrightarrow$ arg $arg\,(z) = 0[\pi]$
b. $z\in iR^{\times} \Leftrightarrow$ arg $arg\,(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$
c. arg $arg\,(\bar{z}) = -$ arg $arg\,(z)$
d. arg $arg\,(-z) =$ arg $arg\,(z) + \pi$

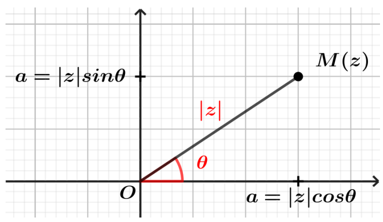


Démonstrations
a. Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.
b. Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.
c. d. Ces résultats se déduisent par symétrie.

III. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1. Définition

Propriété 7
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Si on pose
$\theta =$ arg $arg\,(z)$
alors $a = |z|\cos cos\,\theta$ et $b = |z|\sin sin\,\theta$



Définition 4
On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture, en posant $\theta =$ arg $arg\,(z)$
$$z = |z|(\cos cos\,\theta + i\sin sin\,\theta)$$

Méthode
Écrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique.
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/zIbpXlgISc4**

Écrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

Solution
On commence par calculer le module de z.

$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

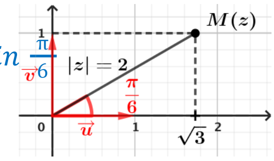
En calculant $\frac{z}{|z|}$ on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et sa partie imaginaire.

$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

On cherche donc un argument θ de z tel que

$$\cos \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \; et \; \sin \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$\cos \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \; et \; \sin \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \; donc \; \frac{z}{|z|} = \cos \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \sin \frac{\pi}{6}$



On en déduit que

$z = 2\left(\cos \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \sin \frac{\pi}{6}\right) avec \arg arg (z) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Propriété 8

Soient z et z' deux nombres complexes **non nuls** et n entier naturel non nul.

Opération	**Argument**
Produit	$\arg arg (zz') = \arg arg (z) + \arg arg (z')$
Puissance	$\arg arg (z^n) = n\times \arg arg (z)$
Inverse	$\arg arg \left(\frac{1}{z}\right) =- \arg arg (z)$
Quotient	$\arg arg \left(\frac{z}{z'}\right) = \arg arg (z) - \arg arg (z')$

Preuve

Voir paragraphe suivant.

Théorème 1

Soient A, B, C, D des points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c, d

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) = arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$
$$modulo$$

IV. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Définition

Propriété 9

$\forall\theta\in R, e^{i\theta} = \cos \cos \theta + i \sin \sin \theta$

Remarque

En terminale, aucun outil ne permet de bien justifier cette propriété. On prendra par la suite le temps de bien définir l'exponentielle, le cosinus et le sinus par le biais de séries entières.

$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de **module 1** et **d'argument** θ.

Propriété 10

$e^{i\pi} =- 1$

Preuve

$e^{i\pi} = \cos \cos \pi + i \sin \sin \pi =- 1 + i\times 0 =- 1$

Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre e), l'algèbre (avec le nombre i) et la géométrie (avec le nombre π).

Exemples

$e^{i0} = \cos \cos 0 + i \sin \sin 0 = 1 + i\times 0 = 1 = e^0$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i\times 1 = i$

Propriété 11

Tout nombre complexe z **non nul** de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** $z = re^{i\theta}$

2. Propriétés

Propriété 12

Soient des réels θ et θ', et n un entier naturel non nul,

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Remarques

- La deuxième formule s'appelle la formule de *Moivre*.
- Toutes ces formules découlent des propriétés de l'exponentielle. La dernière traduit également une propriété du sinus et du cosinus (impair pour le premier et pair pour le second). En effet,

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{cos(\theta) + i\,sin(\theta)} = cos(\theta) - i\,sin(\theta) = cos(-\theta) + i(-\theta) = e^{-i\theta}$$

Preuve des propriétés 3 et 8

Soient z et z' deux nombres complexes **non nuls** et n entier naturel non nul. Désignons par r et r' les modules respectifs de z et z' et θ et θ' leurs arguments.

$$z = re^{i\theta} \quad z' = r'e^{i\theta'}$$

$zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

Donc $\left|zz'\right| = |z|\left|z'\right|$ et $\arg arg\left(zz'\right) = \arg arg\,(z) + ar\left(z'\right)$

$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

Donc $\left|z^n\right| = |z|^n$ et $\arg arg\left(z^n\right) = n\times \arg arg\,(z)$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

$Donc \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}\ et\ \arg arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg arg\,(z)$

$\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$Donc \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{\left|z'\right|}\ et\ \arg arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg arg\,(z) - \arg arg\left(z'\right)$

Méthode

Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/tEKJVKKQazA**

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/zdxRt5poJp0**

1. Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a. $z_1 = -2i$ **b.** $z_2 = -5$ **c.** $z_3 = 1 + i$

2. Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

a. $z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ **b.** $z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Solution

$1.\ a. \left|z_1\right| = |-2i| = 2\ donc\ z_1 = 2\times(-i) = 2e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$1.\ b. \left|z_2\right| = |-5| = 5\ donc\ z_1 = 5\times(-1) = 5e^{i\pi}$

$1.c. \left|z_3\right| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ donc\ z_3 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

On cherche donc un argument θ de z_3 tel que $\cos cos\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin sin\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Or, $\cos cos\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin sin\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'argument $\frac{\pi}{4}$ convient et ainsi $z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

$2.\ a.\ z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos cos\,\frac{\pi}{6} + i\sin sin\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$2.\ b.\ z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos cos\,\frac{\pi}{4} + i\sin sin\,\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

Méthode
Appliquer la notation exponentielle
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/8EVfyqyVBKc**

1. Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$

2. En déduire la forme exponentielle des nombres suivants.

$a = iz$ $b = i\bar{z}$ $c = -\frac{2i}{z}$

Solution

1. $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. $a = iz = 2ie^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$b = i\bar{z} = 2ie^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$c = -\frac{2i}{z} = \frac{2\times(-i)}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$