

Заняття №9

Знаходження функцій обернених до даної

План

1. Приклади розв'язування вправ
2. Розв'язування вправ

Приклад 1. Рівність $y = 2x - 5$ кожному значенню y ставить у відповідність $x = (y + 5)/2$. Можна сказати, що рівність $y = 2x - 5$ визначає x як деяку

функцію змінної y , тобто $x = (y + 5)/2$. Оскільки, звичайно, x позначає аргумент, а y – функцію, то перепишемо залежність $x = (y + 5)/2$ у вигляді $y = (x + 5)/2$. Функція $y = (x + 5)/2$ є оберненою до функції $y = 2x - 5$.

Для того, щоб для функції $y = f(x)$ при $x \in [a, b]$ існувала обернена до неї функція, необхідно і достатньо, щоб функція $y = f(x)$ була монотонною при $x \in [a, b]$ (тобто або тільки зростаючою, або тільки спадною).

Так, для функції $y = x^3$ оберненою є $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Для функції $y = x^2$ при $x \in (-\infty; +\infty)$ оберненої не існує, однак при $x \in (0; +\infty)$ оберненою для $y = x^2$ є $y = \sqrt{x}$, а при $x \in (-\infty; 0)$ оберненою для $y = x^2$ є функція $y = -\sqrt{x}$.

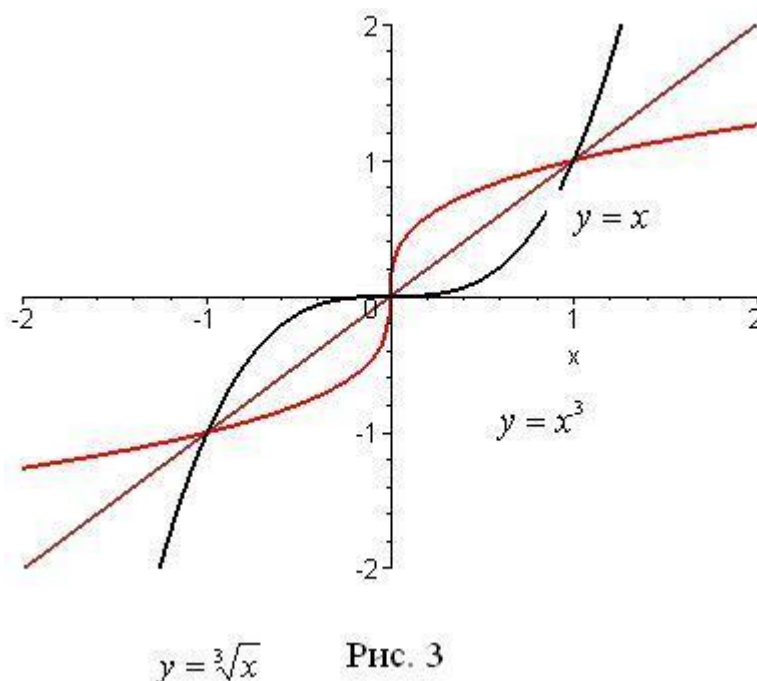


Рис. 3

Якщо точка (x, y) належить графіку функції $y = f(x)$, то точка (y, x) належить графіку оберненої функції. Тому графіки прямої і оберненої функцій

симетричні один одному відносно прямої $y = x$. Так, наприклад, графік функції $y = x^3$ симетричний графіку функції $y = \sqrt[3]{x}$ відносно прямої $y = x$ (рис. 3). Узагалі для функції $y = x^n$ ($x \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$) оберненою є $y = \sqrt[n]{x}$.

Зауваження: Область визначення оберненої функції збігається з множиною значень прямої функції, а множина значень оберненої функції збігається з областю визначення прямої функції.

Приклад 2. Для функції $y = \frac{x+3}{x-1}$ знайти обернену.
Розв'язання

Виразимо x через y : $x+3 = y(x-1) \Leftrightarrow yx - x = 3 + y \Leftrightarrow$

$$\bullet \quad x(y-1) = 3+y \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{y-1}.$$

Замінивши x на y та y на x , маємо: $y = \frac{x+3}{x-1}$.

Отже, функція $y = \frac{x+3}{x-1}$ є оберненою до себе.