ECUACION DE SEGUNDO GRADO Y FUNCION CUADRATICA

Guía elaborada por el profesor Joel Fariñez

La ecuación de segundo grado

La ecuación de segundo grado es una expresión algebraica de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

en donde las letras a, b, c son los coeficientes de la ecuación que pueden tomar o ser representados por cualquier número real; así mismo la x representa la incógnita de dicha ecuación cuya solución vendrá dada por dos valores representados por x_1 y x_2 .

Para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se utilizará una fórmula denominada resolvente, dicha fórmula viene expresada por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ al aplicar dicha fórmula las soluciones obtenidas serán de la forma $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. A fin de entender esta exposición teórica vamos a visualizar unos ejemplos.

Ejemplo 1

Hallar la solución de la ecuación $15x^2 - 7x - 2 = 0$

Aquí identificamos los coeficientes de la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$ con los coeficientes de la ecuación a resolver, es decir, $15x^2 - 7x - 2 = 0$; de aquí se obtiene que $a = 15$, $b = -7$ y $c = -2$, luego sustituyendo los valores en la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se tiene que

$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-2)}}{2 \cdot 15}$ resolviendo las operaciones indicadas nos queda

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{30} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{30} = \frac{7 \pm 13}{30}$ de aquí se obtienen dos valores

$x_1 = \frac{7 + 13}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ y

$x_2 = \frac{7 - 13}{30} = -\frac{6}{30} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$ y así tenemos que las soluciones de $15x^2 - 7x - 2 = 0$ son $x_1 = \frac{2}{3}$ y $x_2 = -\frac{1}{5}$

Función cuadrática

La función cuadrática proviene de la misma ecuación de segundo grado solo que se aborda desde el punto de vista funcional, y para visualizar mejor este tema comenzaremos con un ejemplo

Hacer el estudio completo de la función $f(x) = 6x^2 + x - 2$

primero ***elegimos el conjunto de valores*** a trabajar, en este caso y lo más recomendado es elegir valores pequeños como el conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y con dichos valores evaluamos la función

$f(-2) = 6 \cdot (-2)^2 + (-2) - 2 = 6 \cdot 4 - 2 - 2 = 24 - 4 = 20$

$f(-1) = 6 \cdot (-1)^2 + (-1) - 2 = 6 \cdot 1 - 1 - 2 = 6 - 3 = 3$

$f(0) = 6 \cdot 0^2 + 0 - 2 = 0 + 0 - 2 = -2$

$f(1) = 6 \cdot 1^2 + 1 - 2 = 6 \cdot 1 + 1 - 2 = 6 + 1 - 2 = 7 - 2 = 5$

$f(2) = 6 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 6 \cdot 4 + 2 - 2 = 24 + 0 = 24$

Punto de corte con el eje y

El punto de corte con el eje y viene dado por el valor cuando x es igual a cero, esto es $f(0) = 6 \cdot 0^2 + 0 - 2 = 0 + 0 - 2 = -2$

Puntos de cortes con el eje x

para hallar los puntos de corte con el eje x debemos igualar la función a cero y resolver la ecuación de segundo grado

es decir debemos resolver $6x^2 + x - 2 = 0$

aquí vemos que los coeficientes de la ecuación son: $a = 6; b = 1; c = -2$

al sustituir estos valores en la resolvente $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

obtenemos $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6}$ y pasamos a realizar las operaciones indicadas

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

de aquí obtenemos dos soluciones $x_1 = \frac{-1 + 7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

y $x_2 = \frac{(-1 - 7)}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$

de aquí obtenemos los puntos de corte con el eje x que son $\frac{1}{2}$ y $-\frac{2}{3}$ respectivamente

Coordenadas del vértice

Las coordenadas del vértice las hallamos mediante la siguiente fórmula

$V:\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ en donde los coeficientes a,b,c son los mismos de la ecuación de segundo grado

es decir, $a=6;\ b=1;\ c=-2$ y sustituyendo tenemos

$V:\left(-\frac{1}{2\cdot 6},\frac{4\cdot 6\cdot(-2)-1^2}{4\cdot 6}\right)$ haciendo las operaciones indicadas se tiene

$$V:\left(-\frac{1}{12},\frac{-48-1}{24}\right)=V:\left(-\frac{1}{12},\frac{-49}{24}\right)$$

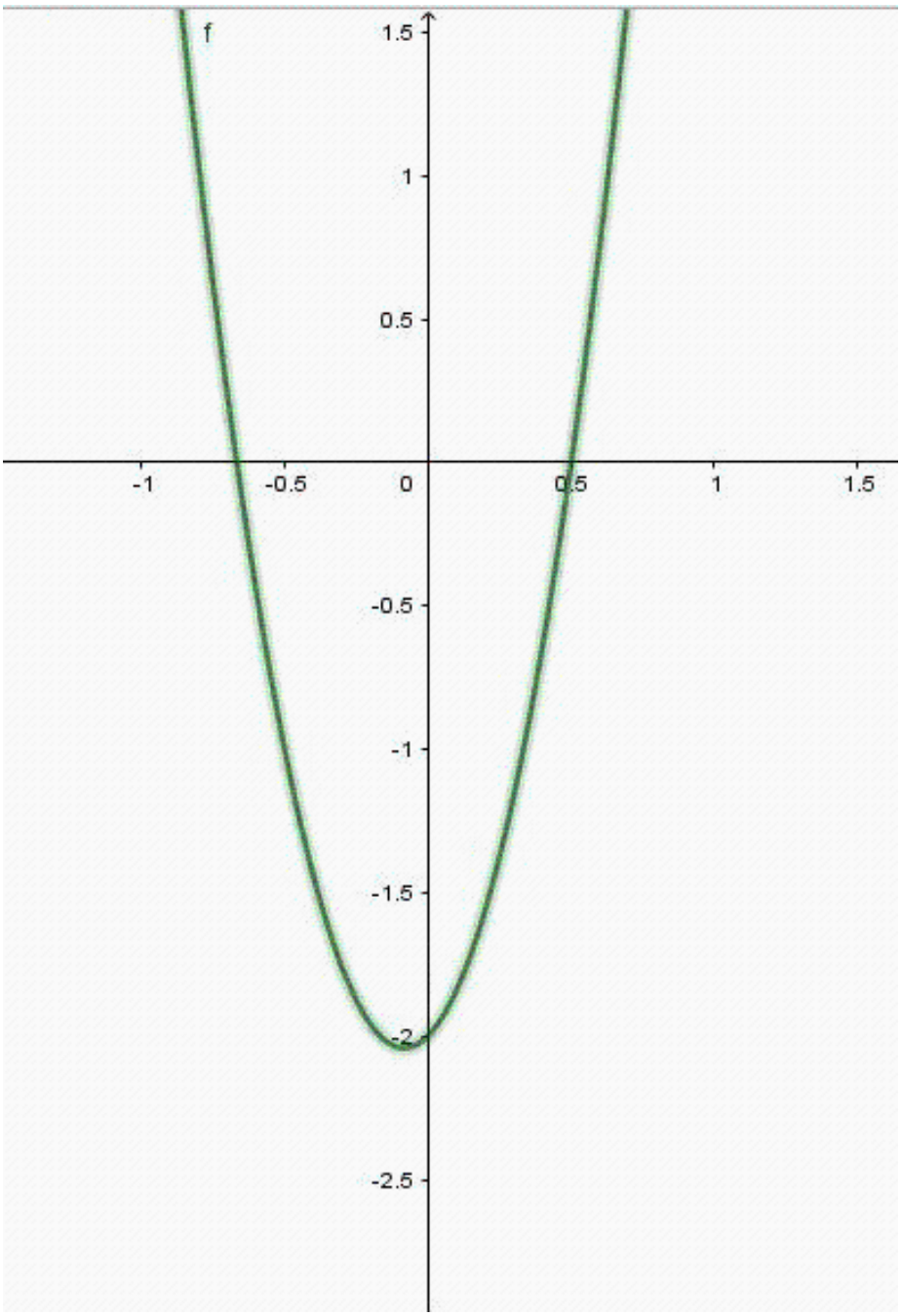
hay que observar que cuando el coeficiente a es positivo entonces el vértice se ubicará hacia abajo
en cambio si fuera negativo se ubicará hacia arriba.

ahora toda esta información la ingresamos en una tabla de valores

valores de x	valores de y
-2	20
-1	3
0	-2 (punto de corte con y)

1	5
2	24
$\frac{1}{2}$ (punto de corte con x)	0
$-\frac{2}{3}$ (punto de corte con x)	0
$-\frac{1}{12}$ (coordenada del vértice en x)	$-\frac{49}{24}$ (coordenada del vértice en y)

ahora procedemos a graficar y obtenemos lo siguiente



Esta gráfica so obtuvo con el programa Geogebra, allí se puede ver una escala de 0,5 cm y además parte de los valores obtenidos, el estudiante deberá practicar este ejercicio a mano para comprobar su destreza de graficación.

siguiendo con el estudio de esta función en la gráfica se observa que el dominio de la función son todos los números reales, y el rango lo visualizamos en el eje y en términos matemáticos esto se expresa así: Dominio: $\mathbb{R}$, Rango $\left[-\frac{1}{12}, +\infty\right)$ esto último es una representación en forma de intervalo lo cual se tratará más afondo cuando estudiemos las inecuaciones
siguiendo con el estudio vemos que la función decrece desde -∞ en x hasta el punto $-\frac{1}{12}$ y crece desde $-\frac{1}{12}$ hasta +∞
y su vértice está ubicado hacia abajo siendo así un punto llamado mínimo de la función, y así concluimos con el estudio de este función.

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones

1.) $x^2 - 2x - 24 = 0$

2.) $6x^2 - 7x - 3 = 0$

Hacer el estudio completo de las siguientes funciones

1.) $f(x) = x^2 + 4x - 21$

2.) $f(x) = 12x^2 + 2x - 3$