

exercise 3.8

n個の内部節点をもつ赤黒木の高さは高々 $2\log(n+1)$ である。

前提

ある節点x(その点自身はふくまない)から葉までの経路上の黒節点の数をその節点の黒高さと呼び、 $bh(x)$ と表す。

証明

まず最初に任意の節点xを根とする部分木は少なくとも $2^{(bh(x) - 1)}$ 個の内部接点を含むことを示す。この主張をxの高さに関する帰納法によって証明する。

もしxの高さが0ならば、xは葉でなくてはならず、xを根とする部分木は少なくとも $2^{(bh(x) - 1)} = 2^0 - 1 = 0$ 個の内部節点を含んでいる。

帰納段階として、正の高さを持ち2つの子をもつ内部節点xを考える。どちらの子もそれ自身の色が赤か黒に依存して、それぞれ $bh(x)$ または $bh(x)-1$ の黒高さをもつ。xのこの高さはxそれ自身の高さより小さいので、帰納法仮定から、それぞれの子は少なくとも $2^{(bh(x)-1)}$ 個の内部節点をもつ。したがって、xを根とする部分木は少なくとも

$(2^{(bh(x)-1)} - 1) + (2^{(bh(x)-1)} - 1) + 1 = 2^{(bh(x))} - 1$ 個の内点を含み、主張が証明された。

hを木の高さとする。赤黒木の根から葉までのどの単順路上の今以外の節点の少なくとも半分は黒である。したがって、根の黒高さは少なくとも $h/2$ であり、

$$n \geq 2^{(h/2)} - 1$$

である。1を左辺に移項し両辺の対数を取れば、 $\log(n + 1) \geq h/2$, つまり、 $h \leq 2\log(n+1)$ を得る。

(アルゴリズムイントロダクション 第1巻 p269より)