

Συγκρούσεις σφαιριδίων

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκονται δύο σφαιρίδια με μάζες $m=1\text{Kg}$ και $2m$ δεμένα στο ένα άκρο δύο νημάτων μήκους $R=1\text{m}$, των οποίων το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε σημείο O που αποτελεί το σημείο $O(0,0)$ ορθογωνίου συστήματος αξόνων (X,Y) πάνω στο επίπεδο. Με τεντωμένα τα νήματα τα σφαιρίδια βρίσκονται

αντίστοιχα στις θέσεις $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ το m και $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ το $2m$. Δύο καθ' όλα

όμοια σφαιρίδια έρχονται με ταχύτητες μέτρων $|v_1|=2\text{m/s}$ το m και $|v_2|=1\text{m/s}$ το $2m$ σε διευθύνσεις πάνω στο επίπεδο κάθετες στα νήματα και συγκρούονται ελαστικά με τα αρχικά όμοιά τους ακαριαία την $t_0=0$, ενώ αμέσως μετά τα "επιτιθέμενα" σφαιρίδια απομακρύνονται από το επίπεδο.

1) Ποια η χρονική στιγμή t_1 που θα συμβεί κρούση μεταξύ των αρχικά ακίνητων σφαιριδίων, με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι η ελάχιστη από τις δυνατές και ποια η θέση Σ_1 του σημείου κρούσης στο σύστημα συντεταγμένων.

2) α) Ποια η στροφορμή του κάθε σφαιριδίου και του συστήματος των δύο σφαιριδίων, αμέσως μετά την κρούση ως προς το σημείο O . $m=1\text{Kg}$

β) Η στροφορμή κάθε σφαιριδίου μεταβλήθηκε σε σχέση με την λίγο πριν την κρούση;

γ) Η στροφορμή του συστήματος μεταβλήθηκε σε σχέση με την λίγο πριν την κρούση;

3) Αν στο σημείο Σ συμβαίνουν κρούσεις, ποια η περίοδος αυτών των κρούσεων στο σημείο αυτό.

4) Αν αμέσως μετά την κρούση των επιτιθέμενων με τα προσδεμένα, τα προσδεμένα στα νήματα σφαιρίδια θα κινηθούν ομόρροπα και αντιωρολογιακά:

α) να σχεδιάσετε τις κατευθύνσεις των "επιτιθέμενων" σφαιριδίων και να υπολογίσετε τις τάσεις των νημάτων μετά την κρούση των επιτιθέμενων με τα όμοιά τους

β) Πότε και που θα συγκρουσθούν για $1^{\text{η}}$ φορά τα m και $2m$;

γ) αν το νήμα στο οποίο είναι προσδεμένο το $2m$ μετά την κρούση του με το m άντεξε οριακά χωρίς να σπάσει, ποιο το όριο θραύσης του. Να θεωρήσετε ότι τα επιτιθέμενα απομακρύνθηκαν αμέσως μετά τις κρούσεις τους με τα προσδεμένα στα νήματα

(Τα σφαιρίδια να θεωρηθούν αμελητέων διαστάσεων και τα νήματα μη ελαστικά)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) Από το κατοπττικό σχήμα (I) υπολογίζω τις γωνίες που σχηματίζουν τα νήματα με τον άξονα Ψ.

$$\eta_{\mu\phi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\phi = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\eta_{\mu\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

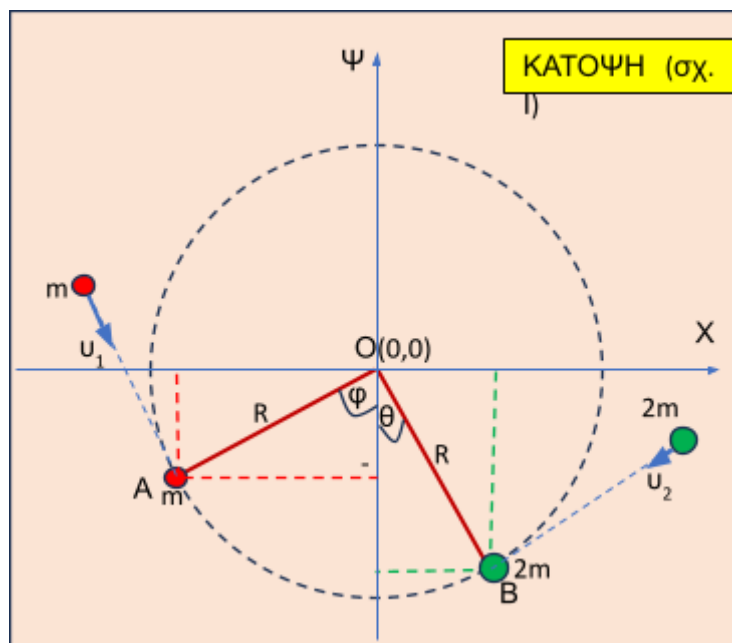
$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\angle A\hat{O}B = \phi + \theta \Rightarrow$$

$$\angle A\hat{O}B = \pi/2 \text{ και}$$

$$\angle AOB = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}$$

Άρα



Κατά τις ελαστικές κρούσεις των m-m και 2m-2m τα σφαιρίδια ανταλλάσσουν ταχύτητες με αποτέλεσμα τα "επιτιθέμενα" να ακινητοποιούνται και να απομακρύνονται, ενώ τα προσδεμένα στα νήματα να αποκτούν τις $u_1=3\text{m/s}$ και $u_2=1\text{m/s}$ αντίστοιχα κάθετες στα τεντωμένα νήματα, κινούμενα ομαλά κυκλικά στο επίπεδο.

Εύρεση της χρονικής στιγμής t_1 ακαριαίας κρούσης m-2m, καθώς και της θέσης κρούσης.

$$\vec{S}_{AB} = \vec{S}_m + \vec{S}_{2m} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi R}{2} = |v_1|t_1 + |v_2|t_1 \Rightarrow$$

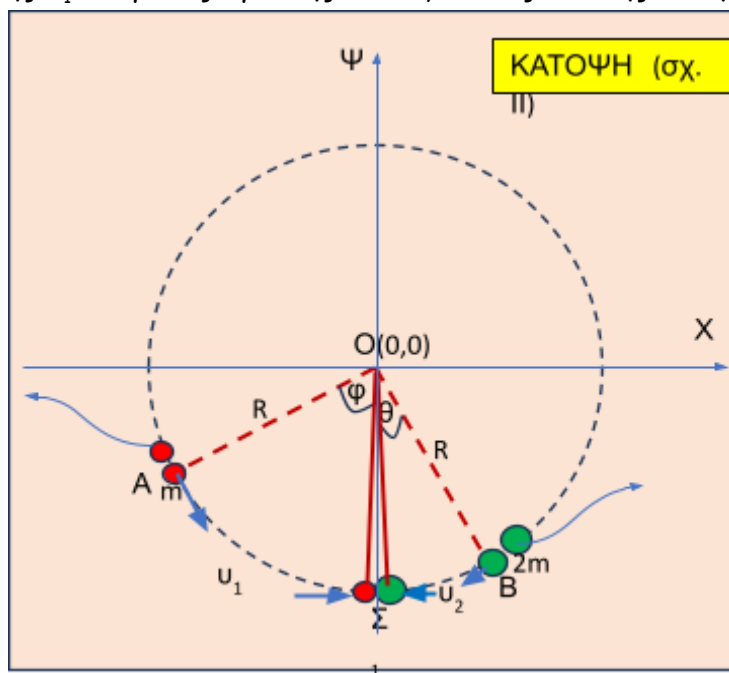
$$\frac{\pi R}{2} = 2t_1 + 1t_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi R}{2} = 3t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6} \text{ s}$$

εναλλακτικά

$$\angle A\hat{O}B = \phi_m + \phi_{2m} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{|v_1|}{R}t_1 + \frac{|v_2|}{R}t_1 \Rightarrow$$



$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}t_1 + \frac{1}{1}t_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 3t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6} s$$

Η χρονική στιγμή t_1 είναι η ελάχιστη δυνατή γιατί με τις κατευθύνσεις των ταχυτήτων των επιτιθέμενων σφαιριδίων που θέσαμε, τα σφαιρίδια που θα κινηθούν μετά τις κρούσεις θα διαγράψουν τις μικρότερες γωνίες φ και θ μέχρι τη σύγκρουσή τους.

Τότε:

$$\varphi_m = \omega_1 t_1 = \frac{|v_1|}{R} t_1 = \frac{\pi}{3} rad$$

$$\theta_{2m} = \omega_2 t_1 = \frac{|v_2|}{R} t_1 = \frac{\pi}{6} rad$$

Άρα το σημείο συνάντησης και ακαριαίας κρούσης είναι το $\Sigma_1 (0, -1m)$ (σχ. II)

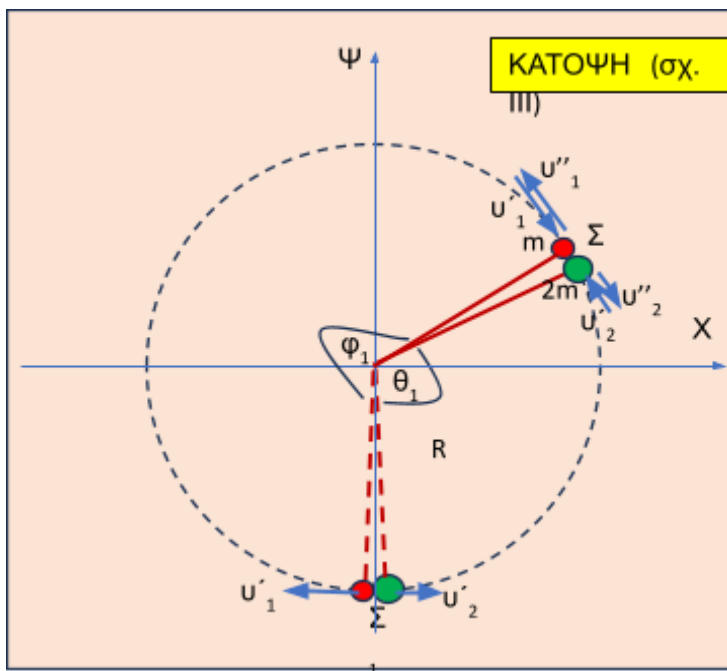
Το αποτέλεσμα είναι προφανές, αφού η σχέση ταχυτήτων είναι 2:1 οπότε το νήμα για το m θα διαγράψει διπλάσια γωνία από ότι το $2m$

2) α) Μετά την ελαστική κρούση των m - $2m$ στο Σ_1 οι ταχύτητες θα είναι:

$$v_1' = \frac{(m-2m)v_1 + 2 \cdot 2m \cdot v_2}{m+2m} = \frac{-2m-4m}{3m} \Rightarrow v_1' = -2m/s$$

$$v_2' = \frac{(2m-m)v_2 + 2 \cdot m \cdot v_1}{m+2m} = \frac{-m \cdot 1 + 2m \cdot 2}{3m} \Rightarrow v_2' = 1m/s$$

Σχήμα (III)



Οι στροφορμές των σφαιριδίων ως προς το Ο είναι:

$$L'_m = m v_1 R = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \Rightarrow L_m = -2g \frac{m^2}{s} \text{ κάθετη στο επίπεδο στο Ο με φορά } \otimes$$

$$L_{2m} = 2m v_2 R = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow L_{2m} = 2g \frac{m^2}{s} \text{ κάθετη στο επίπεδο στο Ο με φορά } \otimes$$

$$L_{ολ} = L_m + L_{2m} \Rightarrow L'_{ολ} = -2 + 2 \Rightarrow L'_{ολ} = 0$$

β) Οι στροφορμές των σφαιριδίων ως προς το Ο πριν την κρούση

$$L_m = m v_1 R = 1 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow L_m = 2Kg \frac{m^2}{s} \text{ κάθετη στο επίπεδο στο Ο με φορά } \otimes$$

$$L_{2m} = 2m v_2 R = 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \Rightarrow L_{2m} = -2Kg \frac{m^2}{s} \text{ κάθετη στο επίπεδο στο Ο με φορά } \otimes$$

Οι στροφορμές των σφαιριδίων διατήρησαν μεν το μέτρο τους όμως άλλαξε η φορά τους δηλαδή μεταβλήθηκαν

γ) Η στροφορμή του συστήματος πριν την κρούση ήταν:

$$L_{ολ} = L_m + L_{2m} \Rightarrow L_{ολ} = m v_1 R + m v_2 R \Rightarrow L_{ολ} = 2 - 2 \Rightarrow L_{ολ} = 0$$

Προφανές το αποτέλεσμα αφού $\Sigma \tau_{εξ} = 0$ αρα η L του συστήματος σταθερή με βάση την "αρχή διατήρησης στροφορμής"

3) Είδαμε προηγουμένως ότι μετά την κρούση των m και 2m τα σφαιρίδια διατηρούν τα μέτρα των ταχυτήτων που είχαν πριν αλλά με αντίθετες τις κατευθύνσεις τους.

Οι γωνίες που διαγράφουν μέχρι την 2^η κρούση τους θα έχουν την σχέση των

$$\left(\varphi = \omega t \Rightarrow \varphi = \frac{v}{R} t \right)$$

γραμμικών ταχυτήτων τους λόγω αναλογίας

$$\text{Άρα : } \left| \begin{matrix} \varphi_1 = 2\theta_1 \\ \varphi_1 + \theta_1 = 2\pi \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow 3\theta_1 = 2\pi \Rightarrow \theta_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ και } \varphi_1 = \frac{4\pi}{3} \text{ και η 2}^{\text{η}} \text{ κρούση θα γίνει στο σημείο } \Sigma_2 \text{ (σχ. III).}$$

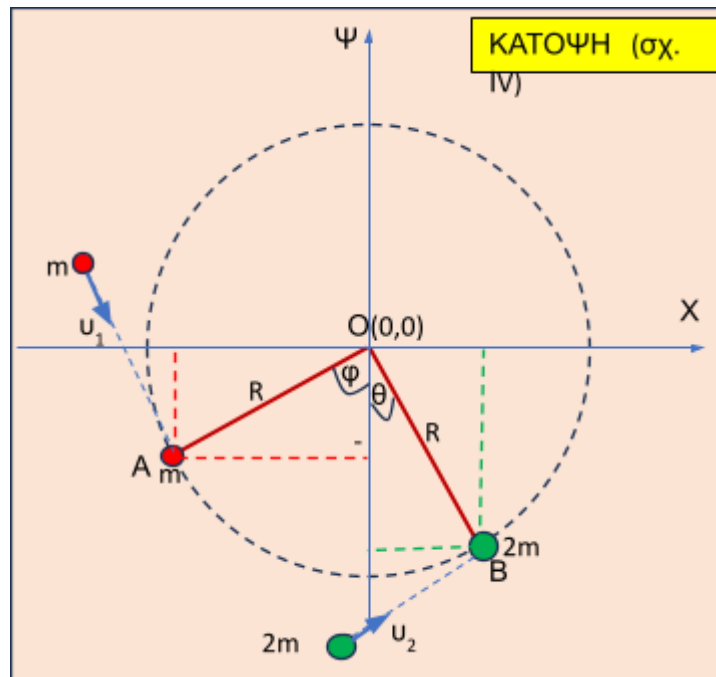
Στο Σ_2 λοιπόν μετά την κρούση θα αντιστραφούν οι ταχύτητες των σφαιριδίων διατηρώντας το μέτρο τους ,όπως αναφέραμε προηγουμένως, άρα θα επιστρέψουν στο σημείο Σ_1 στον ίδιο χρόνο που έκαναν από το Σ_1 στο Σ_2 ,συγκρουόμενα για 3^η φορά.

Η περίοδος λοιπόν των κρούσεων στο Σ_1 ,μέσω της κίνησης του m είναι:

$$T = t_m^{\Sigma_1 \Sigma_2} + t_m^{\Sigma_2 \Sigma_1} = 2t_m^{\Sigma_1 \Sigma_2} = 2 \frac{\varphi_1}{\omega_1} = 2 \frac{\varphi_1}{\frac{|v_1|}{R}} = 2 \frac{\varphi_1 R}{|v_1|} = 2 \frac{\frac{4\pi}{2}}{2} \Rightarrow T = \frac{4\pi}{3} s$$

4) α)

Στο σχήμα IV φαίνονται οι κατευθύνσεις των "επιτιθέμενων" σφαιριδίων



Μετά τις κρούσεις γίνεται ανταλλαγή ταχυτήτων και αναπτύσσονται τάσεις στα νήματα οι οποίες θα παίξουν ρόλο κεντρομόλων δυνάμεων. Έτσι:

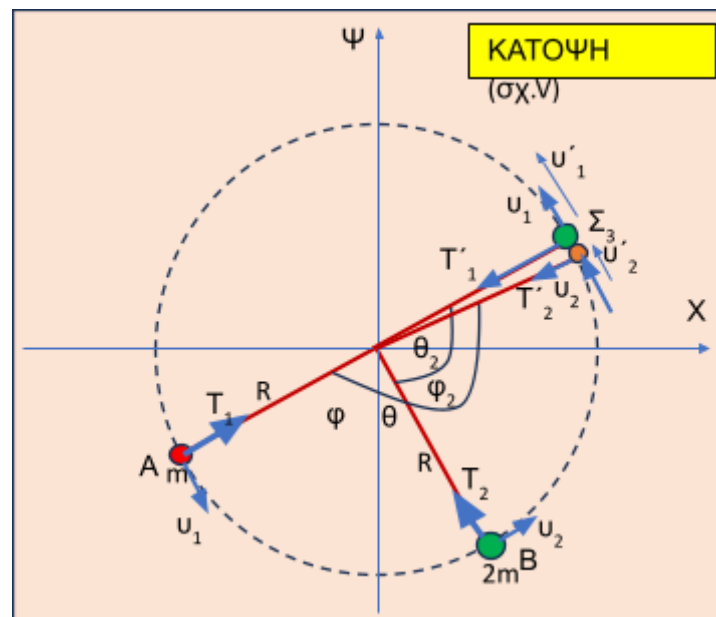
$$T_1 = m \frac{v_1^2}{R} = 1 \frac{2^2}{1} \Rightarrow$$

$$T_1 = 4N$$

$$T_2 = 2m \frac{v_2^2}{R} = 2 \cdot 1 \frac{1^2}{1} \Rightarrow$$

$$T_2 = 2N$$

(σχ.V)



β) Οι γωνίες που διαγράφουν μέχρι την 1^η κρούση τους θα έχουν την σχέση των

γραμμικών ταχυτήτων τους λόγω αναλογίας $\left(\varphi = \omega t \Rightarrow \varphi = \frac{v}{R} t \right)$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_2 = 2\theta_2 \\ \varphi_2 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{και } \varphi_2 = \pi$$

η κρούση θα γίνει στο σημείο Σ_3 (σχ. V).

$$\varphi_2 = \frac{v_1}{R} t \Rightarrow \pi = \frac{2}{1} t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} s$$

γ) Μετά την ελαστική κρούση των $m-2m$ στο $\Sigma_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ οι ταχύτητες θα είναι:

$$v_1' = \frac{(m-2m)v_1 + 2 \cdot 2m \cdot v_2}{m+2m} = \frac{-2m+4m}{3m} \Rightarrow v_1' = \frac{2}{3} m/s$$

$$v_2' = \frac{(2m-m)v_2 + 2 \cdot m \cdot v_1}{m+2m} = \frac{m \cdot 1 + 2m \cdot 2}{3m} \Rightarrow v_2' = \frac{5}{3} m/s \quad (\text{σχ. V})$$

Στο σώμα $2m$ η τάση του νήματος παίζοντας το ρόλο κεντρομόλου θα είναι:

$$T = 2m \frac{v_2'^2}{R} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{25}{1} \Rightarrow T = \frac{50}{9} \Rightarrow T = 5,5 N$$

Άρα το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_\theta = 5,5 N$

Παντελεήμων Παπαδάκης

19/11/2023