

Contrôle continu d'Algèbre 2

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses

- (1) Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soient f et g deux endomorphismes d'un K -ev E . Alors, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Réponse: **Vrai**

Justification : soit A la matrice associée à f dans la base canonique et B la matrice associée à g dans la base canonique

$$\text{on a } M_{f \circ g} = AB \text{ et } M_{g \circ f} = BA$$

$$\det(AB - \lambda I) = \det(B(A - \lambda I)) = \det(B) \det(A - \lambda I)$$

$$\det(BA - \lambda' I) = \det(B(A - \lambda' I)) = \det(B) \det(A - \lambda' I)$$

$$\det(AB - \lambda I) = \det(BA - \lambda' I)$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda'$$

alors :

D'où $g \circ f$ et $f \circ g$ ont les mêmes valeurs propres

- (2) Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ont les mêmes racines.

Réponse: **Vrai**

Justification : λ est une valeur propre de f , donc λ est une racine du polynôme minimal de f , d'où λ est une racine de polynôme caractéristique

- (3) Un endomorphisme f d'un K -e.v. E est trigonalisable si son polynôme minimal est scindé sur K .

Réponse: **Vrai**

Justification : car si le polynôme minimal est scindé alors le polynôme caractéristique est aussi scindé

- (4) Si P et Q sont deux polynômes non constants de $K[X]$ tels que PQ est un polynôme annulateur d'un endomorphisme f d'un K -e.v. E , alors

$$E = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f))$$

Réponse: **Vrai**

Justification : soit $M = PQ$

On sait que $P(f) \subseteq \ker M$ et $Q(f) \subseteq \ker M$

On a d'après le théorème de Bezout : $\exists U, V \in K[X]$ tq $UP + VQ = 1$

Donc $U(f)P(f) + V(f)Q(f) = I_E$

Soit $x \in \ker P f \Rightarrow \ker Q f$

On a $x \in U f P f \Rightarrow V Q f f = 0 + 0 = 0$

Donc $\ker P f \Rightarrow \ker Q f \Rightarrow 0$

Soit $x \in \ker M f$

On a $x \in U f P f \Rightarrow V Q f$

$$f \Rightarrow x_2 x_1 x_1 \Rightarrow V f Q$$

$$f \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$x_2 \Rightarrow U f P f \Rightarrow Q f \Rightarrow x_2 \Rightarrow Q f U f P$$

$$f \Rightarrow \Rightarrow x_2 \Rightarrow U f$$

$$\Rightarrow PQ \Rightarrow f \Rightarrow x_2 \Rightarrow 0$$

$\Rightarrow$

$$P f \Rightarrow x_1 \Rightarrow P f V \Rightarrow Q f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \Rightarrow V Q f \Rightarrow PQ \Rightarrow f \Rightarrow x_1 \Rightarrow 0$$

Donc $E \in \ker P f \Rightarrow \ker Q f$
D'où le résultat.

- (5) Si une matrice est diagonalisable, la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ est égale à la multiplicité de λ . Réponse: **Vrai**

Justification : soit A une matrice diagonalisable

On a $E = \begin{pmatrix} E_{+1} & E_{+2} & \dots & E_{+n} \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A

Si on pose $n_i = \dim E_{+i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$

On obtient alors $P X = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

- (6) Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Réponse: **Vrai**

Justification : soit $A' = P A P^{-1}$

On a x est un vecteur propre de A $\Rightarrow P x^{-1}$ est un vecteur propre de A'

$$\text{Donc } A' P^{-1} x = P A P P^{-1} x = P A x = \lambda P^{-1} x$$

Alors ils ont les mêmes valeurs propres ,

- (7) Toute matrice admet au moins une valeur propre, réelle ou complexe.

Réponse: **Vrai**

Justification : soit A une matrice carrée d'ordre n

Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$P_X = \det(XI_n - A)$$

Alors les racines de P sont les valeurs de la matrice

Or P est de degré n alors il y a au moins une

valeur propre, soit réelle ou complexe

(8) Toute matrice admet une infinité de vecteurs propres, à coordonnées réelles ou complexes.

Réponse: **Vrai**

Justification : soit λ une valeur propre d'un vecteur propre x tq $f(x) = \lambda x$

Soit α tq $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda x = \lambda (\alpha x)$

donc λ est une valeur propre de vecteur αx avec $\alpha \neq 0$

il y a une infinité de vecteurs propres

(9) Les vecteurs propres d'une matrice et ceux de sa transposée sont les mêmes.

Réponse:

Faux

Justification : si on prend par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc les vecteurs propres associés à A n'est pas le même que les vecteurs propres associés à A^t .

(10) $D = \text{diag}(-1, -3, 6)$

(10) la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et sa matrice diagonale est D

Réponse: **Faux**

Justification : on a

$$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & -2 & X-1 \end{pmatrix} = (X-1) \det \begin{pmatrix} X-2 & -1 \\ 0 & X-1 \end{pmatrix} = (X-1)^2 (X-2)$$

$$\text{Donc } \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow (X-1)^2 (X-2) = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ (racine double)} \text{ ou } X = 2 \text{ (racine simple)}$$

Alors $\text{diag}(1, 1, 2)$

