



Como A sólo tiene 3 filas su rango puede ser a lo máximo 3

Hallemos el menor de A,  $|\alpha \ 0 \ \alpha \ 3 \ \alpha \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 1| = -\alpha^2 + 3\alpha = \alpha(3 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = 3$

- Si  $\alpha \neq 0, \alpha \neq 3$ , A tiene 3 filas l.i. Luego,  $\text{rg } A = 3$

- Si  $\alpha = 0, \text{rg } A = \text{rg}(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 2) \text{ f1} = 0 = \text{rg}(3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 2) = 2$  porque el menor  $|3 \ 0 \ 0 \ 1| = 3 \neq 0$

- Si  $\alpha = 3, A = (3 \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 3 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 2)$ ; el menor de A,  $|0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 1 \ - \ 1 \ 2| = 9 - 18 = -9 \neq 0$ . Luego,  $\text{rg } A = 3$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea r la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:  $r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r.

Resolución

Haciendo  $x = 0, \begin{cases} y - z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$ . Sumando,  $3y = 3, y = 1$ ;  $z = y - 1 = 1 - 1 = 0$ . Luego,  $A(0, 1, 0) \in r$

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:  $\vec{d}_r = (1, 1, -1) \times (2, 2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3, -3, 0) // (1, -1, 0)$ . Por tanto,  $r: \begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = 0 \end{cases}$

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto  $P(2, 1, 0)$ , que es exterior a r.

Resolución

Hallemos primero el punto Q de r de forma que  $\vec{PQ} \perp \vec{d}_r$ . Una vez hallado, la recta s que se pide es la que pasa por P y Q.

Como  $Q \in r$  será de la forma  $Q(k, 1 - k, 0)$ . Como

$$\vec{PQ} \perp \vec{d}_r \Rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{d}_r = 0 \Rightarrow (k - 2, -k, 0) \cdot (1, -1, 0) = 0$$

Operando,  $k - 2 + k = 0$ , de donde  $k = 1$  y  $\vec{d}_s = \vec{PQ} = (-1, -1, 0)$ . Luego,

$$s: \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 - k \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es:  $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ , los planos de ecuaciones

$\pi_1: x + y + z = 1$  y  $\pi_2: x + y - z = 1$ ,  $P_1$  el punto de corte de la recta r con el plano  $\pi_1$  y  $P_2$  el punto de corte de la recta r con el plano  $\pi_2$ . Calcula:

a) las coordenadas de los puntos  $P_1$  y  $P_2$

**Resolución**

Poniendo r en forma paramétrica,  $r: \{x = 1 + k \ y = 1 - k \ z = 1 + 2k\}$

$P_1 = r \cap \pi_1$ . Sustituyendo en  $\pi_1: 1 + k + 1 - k + 1 + 2k = 1 \Rightarrow 2k + 3 = 1 \Rightarrow k = -1$  y  $P_1(0, 2, -1)$

$P_2 = r \cap \pi_2$ . Sustituyendo en  $\pi_2: 1 + k + 1 - k - 1 - 2k = 1 \Rightarrow -2k + 1 = 1 \Rightarrow k = 0$  y  $P_2(1, 1, 1)$

b) la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$

**Resolución**

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \left| \vec{P_1 P_2} \right| = |(1, -1, 2)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \cong 2,45 \text{ u}$$

c) la distancia del punto  $P_1$  al plano  $\pi_2$ .

**Resolución**

$P_1(0, 2, -1)$  y  $\pi_2: x + y - z - 1 = 0$ . Usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano,

$$\text{dist}(P_1, \pi_2) = \frac{|0 + 2 - (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1,13 \text{ u}$$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

**Ejercicio A3**

Sea la función  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ . Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa  $x = 2$

**Resolución**

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{3 \pm 1}{4}, x = 1, x = \frac{1}{2}$$

Tabla de signos de  $f'(x)$ :

|         |                |        |                    |               |                    |        |                |
|---------|----------------|--------|--------------------|---------------|--------------------|--------|----------------|
|         | $(-\infty, 0)$ | 0      | $(0, \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{2}$ | $(\frac{1}{2}, 1)$ | 1      | $(1, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | -              | 0      | +                  | 0             | -                  | 0      | +              |
| $f(x)$  | decreciente    | mínimo | creciente          | máximo        | decreciente        | mínimo | creciente      |

f es decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1)$  y creciente en  $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

Máximo relativo:  $x = \frac{1}{2}, y = f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^4 - 2(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{16}$ , punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$

Mínimo relativo:  $x = 0, y = f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^3 + 0^2 = 0$ , punto  $(0, 0)$

Mínimo relativo:  $x = 1, y = f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 = 0$ , punto  $(1, 0)$

La ecuación de la recta tangente en un punto  $A(x_0, f(x_0))$  es rtg:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

$$x_0 = 2; f'(x_0) = f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 12; f(x_0) = f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2^2 = 4$$

$$\text{rtg: } y = 12(x - 2) + 4 \Rightarrow \text{rtg: } y = 12x - 20$$

**Ejercicio B3**

La función  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$  es creciente en el intervalo  $(-\infty, 1)$  y decreciente en el intervalo  $(1, \infty)$ . Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa  $x = 2$  es perpendicular a la recta de ecuación  $y = x + 2$  y  $f(0) = \frac{\text{sen } x}{x}$ . Calcula los valores de los parámetros A, B y C.

**Resolución**

Observa que  $f'(x) = 2Ax + B$

Al ser  $f$  creciente en el intervalo  $(-\infty, 1)$  y decreciente en  $(1, \infty)$ , tiene un máximo relativo en  $x = 1$

Luego,  $f'(1) = 2A \cdot 1 + B = 0$ . O sea,  $2A + B = 0$

Por otra parte, la pendiente de la recta  $r: y = x + 2$  es 1. Al ser la recta tangente en  $x = 2$  perpendicular a  $r$ , debe ser  $f'(2) = \text{pendiente de } rtg = \frac{-1}{1} = -1$ .

Sustituyendo,  $2A \cdot 2 + B = 1$ . O sea,  $4A + B = 1$

Restando las ecuaciones,  $2A = -1, A = \frac{-1}{2}; B = -2A = -2 \cdot \frac{-1}{2} = 1$ . Queda,  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$

$C = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 0 + C = f(0) = \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\text{sen } 0}{0} = \frac{0}{0}$  Indeterminación (L'Hôpital)

$\frac{(\text{sen } x)'}{(x)'} = \frac{\text{cos } \text{cos } x}{1} = \text{cos } \text{cos } 0 = 1$ , entonces  $C = \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ .

Conclusión:  $A = \frac{-1}{2}, B = C = 1$  y  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación  $y = \frac{x^2}{4}$  y superiormente por las curvas de ecuaciones  $y = \frac{4}{x^2}$  e  $y = 4$ . Calcula el área de ese recinto.

**Resolución**

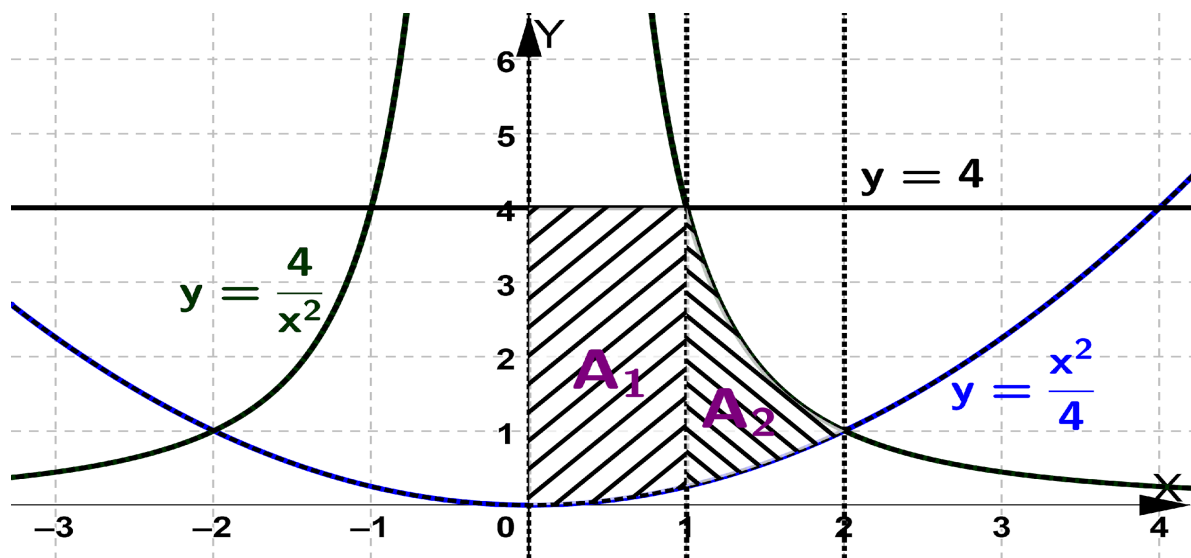
Puntos de corte entre las curvas:

$$\left\{ y = \frac{x^2}{4} \quad y = \frac{4}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^4 = 16; x = 2, y = \frac{2^2}{4} = 1, (2, 1); x = -2, y = \frac{(-2)^2}{4} = 1, (-2, 1) \right.$$

$$\left\{ y = \frac{x^2}{4} \quad y = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 4 \Rightarrow x^2 = 16; x = 4, y = 4, (4, 4); x = -4, y = 4, (-4, 4) \right.$$

$$\left\{ y = \frac{4}{x^2} \quad y = 4 \Rightarrow \frac{4}{x^2} = 4 \Rightarrow x^2 = 1; x = 1, y = 4, (1, 4); x = -1, y = 4, (-1, 4) \right.$$

El recinto cuya área se pide es



El área que se pide es  $A = A_1 + A_2$ .

$$A_1 = \int_0^1 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } p(x) = 4x - \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} = \frac{48x - x^3}{12}.$$

Por la regla de Barrow,  $A_1 = p(1) - p(0) = \frac{48 \cdot 1 - 1^3}{12} - \frac{48 \cdot 0 - 0^3}{12} = \frac{47}{12}$

$$A_2 = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } q(x) = \frac{-4}{x} - \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} = \frac{-48 - x^4}{12x}.$$

Por la regla de Barrow,  $A_2 = q(2) - q(1) = \frac{-48 - 2^4}{12 \cdot 2} - \frac{-48 - 1^4}{12 \cdot 1} = \frac{-64}{24} - \frac{-49}{12} = \frac{17}{12}$

Luego, el área que se pide es  $A = A_1 + A_2 = \frac{47}{12} + \frac{17}{12} = \frac{16}{3} \cong 5,33 u^2$

#### Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:  $\int \frac{x^2 + 4}{(x + 2)^2} dx$  y  $\int (x + 2) \operatorname{sen}(3x) dx$

#### Resolución

Sea  $I = \int \frac{x^2 + 4}{(x + 2)^2} dx = \int \frac{x^2 + 4}{x^2 + 4x + 4} dx.$

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 + 4x + 4} = 1 - \frac{4x}{(x + 2)^2} \cdot \int 1 \int \frac{-4x}{(x + 2)^2} x \int \frac{-4x}{(x + 2)^2} \sim$$

$$\frac{-4x}{(x + 2)^2} = \frac{-4x}{2(x + 2)^2}$$

2)  $-4x + 2$

Si  $-28$ ; Si  $002A + B = 2A + 8 \Rightarrow A - 4 \int \left(\frac{-4}{2} - \frac{8}{(x + 2)^2}\right) - 4|2| - \frac{8}{x + 2} \cdot -4|2| - \frac{8}{x + 2}$

Para  $I' = \int (x + 2) \operatorname{sen}(3x) dx$  usamos la integración por partes

$$\left[ u = x + 2 \quad dx \quad dv = \operatorname{sen}(3x) \quad dx \quad v = \frac{-\operatorname{coscos}(3x)}{3} \right]$$

$$f' = \frac{-(x+2)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \int \cos(3x) dx = \frac{-(x+2)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin(3x)}{3} + k = \frac{\sin(3x) - 3(x+2)\cos(3x)}{9} + k$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

**Ejercicio A5**

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2% y en el nocturno es del 10%. Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

- a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa
- b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

**Resolución**

Sean los sucesos A = la pieza se produce en el turno diurno

B = la pieza se produce en el turno nocturno      D = la pieza es defectuosa

Según el enunciado,  $p(A) = \frac{3}{4} = 0,75$ ,  $p(B) = \frac{1}{4} = 0,25$

$p(D/A) = 2\% = 0,02$        $p(D/B) = 10\% = 0,1$

a) Se pide  $p(D)$ . Por el teorema de probabilidad total,

$$p(D) = p(A)p(D/A) + p(B)p(D/B) = 0,75 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,1 = 0,04 = 4\%$$

$$b) \text{ Se pide } p\left(\frac{A}{D}\right) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A)p(D/A)}{p(D)} = \frac{0,75 \cdot 0,02}{0,04} = 0,375 = 37,5\%$$

**Ejercicio B5**

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15% del alumnado está en el nivel avanzado, el 65% en el nivel medio y el 20% restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

- a) 85,5 puntos.
- b) 48 puntos.

**Resolución**

$$X = \text{puntuación} \rightarrow N(65; 18) \Rightarrow Z = \frac{X-65}{18} \rightarrow N(0, 1).$$

Sea "a" = nota máxima para estar en el nivel inicial y "b" = nota mínima para estar en el nivel avanzado.

Nos dicen que  $p(X \leq a) = 20\% = 0,2$  y  $p(X \geq b) = 15\% = 0,15$

Por una parte

$$0,2 = p(X \leq a) = p\left(\frac{X-65}{18} \leq \frac{a-65}{18}\right) = p\left(Z \leq \frac{a-65}{18}\right) \Rightarrow p\left(Z \leq -\frac{a-65}{18}\right) = p\left(Z \leq \frac{65-a}{18}\right) = 1 - 0,2 = 0,8$$

Buscando en la tabla de la  $N(0, 1)$  obtenemos  $\frac{65-a}{18} \cong 0,84$ . De donde,  $a = 65 - 0,84 \cdot 18 = 49,88$

Por otra parte

$$0,15 = p(X \geq b) = p\left(\frac{X-65}{18} \geq \frac{b-65}{18}\right) = p\left(Z \geq \frac{b-65}{18}\right) = 1 - p\left(Z < \frac{b-65}{18}\right)$$

Despejando,  $p\left(Z < \frac{b-65}{18}\right) = 0,85$  y buscando en la tabla de la  $N(0, 1)$  obtenemos  $\frac{b-65}{18} = 1,04$

De donde,  $b = 1,04 \cdot 18 + 65 = 83,72$

Por tanto, nivel inicial: hasta 49,88 puntos, nivel medio: de 49,89 puntos hasta 83,72 puntos

nivel avanzado: más de 83,72 puntos

a) Como  $85,5 > 83,72$ , el alumno está en nivel avanzado

b) Como  $48 < 49,88$ , el alumno está en nivel inicial