

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	Tarih	21-25 Ekim 2024
Sınıf	10	Süre	3 ders saati
Alt Öğrenme Alanı	FONKSİYONLAR		
Konu	Fonksiyonlarla İlgili Problemler		

BÖLÜM II

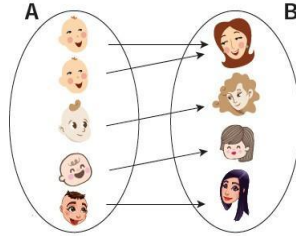
Kazanım	10.2.1.1. Fonksiyonlarla ilgili problemler çözer.
Değerler	Dostluk – Sözüde durma
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

Fonksiyonlarla İlgili Problemler

Doğum için bir hastanenin ameliyathanesine aynı anda alınan 4 anne adayının tamamı sağlıklı birer doğum gerçekleştirmiştir. Anne adaylarından birinin ikiz bebeği, diğer üçünün ise birer bebeği dünyaya gelmiştir. Hemşire, bebekleri yeni doğan servisine götürerek kontrollerini yaptırdıktan sonra kıyafetlerini giydirip annelerine teslim etmektedir. Her bebeğin annesine teslim edilmesi ve serviste teslim edilmeyen bebeğin kalmaması gerekmektedir. Bebeklerin oluşturduğu küme A, annelerin oluşturduğu küme B kümesi olmak üzere bebeklerin annelerine teslim edilmesi ile ilgili yukarıda verilen eşleştirmeyi inceleyiniz.

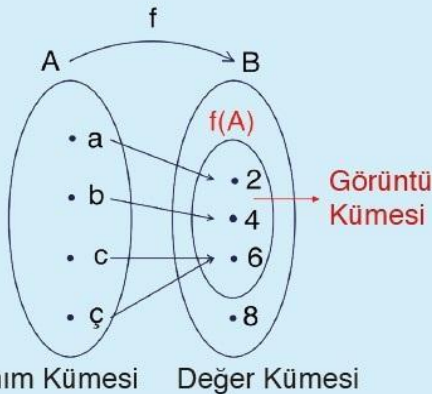


Yandaki eşleştirmede bebeklerin her birini hemşirenin kendi annesine teslim ettiği görülmektedir. Annesine teslim edilmeyen bebeğin kalmaması ve her bebeğin annesine teslim edilmesi sebebiyle yapılan bu eşleştirme doğru bir eşleştirme örneğidir (Bir annenin ikiz bebeği olduğundan ikiz bebeklerin her ikisinin de kendi annelerine götürüldüğüne dikkat ediniz.). Yandaki şekilde yapılan eşleştirme, bu bölümde öğrenilecek fonksiyon konusu için bir örnek model oluşturmaktadır.

A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye **A dan B ye tanımlı fonksiyon** denir. Fonksiyonlar genellikle f , h , g gibi sembollerle gösterilir.

Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu $f : A \rightarrow B$ ile gösterilir. A kümesine **tanım kümesi**, B kümesine **değer kümesi** denir. A dan A ya tanımlı bir fonksiyona kısaca **A da tanımlı fonksiyon** da denilebilir. f fonksiyonu A kümesinden alınan bir x elemanını B kümesindeki bir y elemanı ile eşliyor ise **x elemanının f altındaki görüntüsü y elemanıdır** denir. Bu durum $y = f(x)$ biçiminde gösterilir.

$f : A \rightarrow B$ olmak üzere tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye **bu fonksiyonun görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir. Görüntü kümesi ortak özellik yöntemi ile $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ olarak ifade edilir.



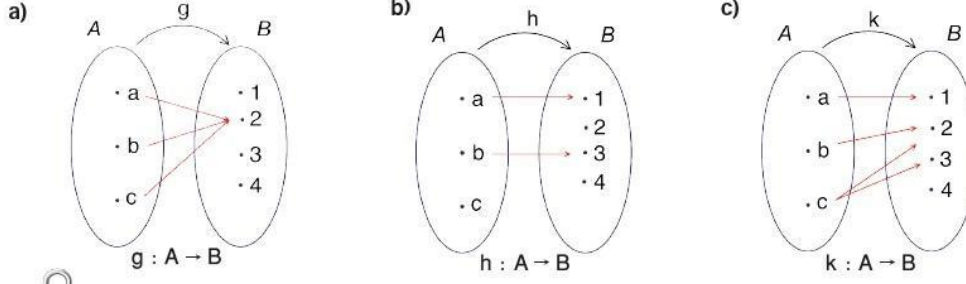
Örneğin yanda verilen şekilde,

- Tanım kümesinde boşta kalan herhangi bir eleman olmadığından ve tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde yalnız bir elemanla eşlendiğinden f bir fonksiyondur.
- f fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{a, b, c, \text{ç}\}$, değer kümesi $B = \{2, 4, 6, 8\}$, görüntü kümesi $f(A) = \{2, 4, 6\}$ ve $f(A) \subseteq B$ olur.
- a elemanının f altındaki görüntüsü 2 olup $f(a) = 2$ olarak ifade edilir. Benzer şekilde $f(b) = 4$, $f(c) = 6$ ve $f(\text{ç}) = 6$ olur.
- f fonksiyonu sıralı ikililer kullanılarak $f = \{(a, 2), (b, 4), (c, 6), (\text{ç}, 6)\}$ biçiminde de gösterilebilir.



Örnek

Aşağıdaki Venn şemaları ile verilen ifadelerden hangilerinin fonksiyon olduğunu bulunuz.



Çözüm

- a) g , tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde bir ve yalnız bir elemanla eşleştirdiği için fonksiyondur.
- b) h , tanım kümesindeki c elemanını değer kümesinde herhangi bir elemanla eşleştirmedikleri için **fonksiyon değildir**.
- c) k , tanım kümesindeki c elemanını değer kümesinde iki elemanla eşleştirdiği için **fonksiyon değildir**.



Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin A kümesinden B kümesine bir fonksiyon belirttiğini bulunuz.

- a) $f = \{(1, y), (2, x), (3, z), (4, y)\}$ b) $g = \{(1, x), (2, y), (4, z)\}$ c) $h = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$



Çözüm

- a) $f = \{(1, y), (2, x), (3, z), (4, y)\}$ ifadesinde tanım kümesindeki tüm elemanlar birer defa eşlendiği için f bir fonksiyondur.
- b) $g = \{(1, x), (2, y), (4, z)\}$ ifadesinde tanım kümesindeki 3 elemanı değer kümesindeki herhangi bir elemanla eşleşmediği için g bir **fonksiyon değildir**.
- c) $h = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$ ifadesinde B kümesindeki elemanlar A kümesindeki elemanlar ile eşleştiği için h , A dan B ye bir **fonksiyon değildir**.



Örnek

$f : (-2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 2x - 7$ olduğuna göre f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.



Çözüm

$x \in (-2, 1)$ olduğundan $-2 < x < 1$ olur. Buradan eşitsizliğin her bölgesi 2 ile çarpılırsa $-4 < 2x < 2$ olur. Her bölgeye -7 eklenirse $-11 < 2x - 7 < -5$ elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun görüntü kümesi $(-11, -5)$ olarak bulunur.



Örnek

$f : A \rightarrow B$, $f(x) = 2x - 3$ ve $f(A) = (-1, 3]$ olduğuna göre A kümesini bulunuz.



Çözüm

$f(x) \in (-1, 3]$ olduğundan $-1 < 2x - 3 \leq 3$ olur. Buradan eşitsizliğin her bölgesine 3 eklenip her bölgesi $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa $1 < x \leq 3$ elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun tanım kümesi $A = (1, 3]$ olarak bulunur.



Örnek

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 3x^2 + 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $h(5)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$h(5)$, 5 in h fonksiyonundaki görüntüsü olduğundan h fonksiyonunda x yerine 5 yazılırsa $h(5) = 3 \cdot 5^2 + 5 = 3 \cdot 25 + 5 = 80$ olur.



Örnek

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A kümesinden B kümesine tanımlı kaç farklı fonksiyon yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

Fonksiyon; A kümesinden B kümesine tanımlandığından A tanım kümesini, B ise değer kümesini oluşturur. Bu durumda

$a \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan biri ile 4 farklı şekilde,
 $b \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan biri ile 4 farklı şekilde,
 $c \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan biri ile 4 farklı şekilde eşlenebileceği görülür.

Buradan saymanın temel ilkesi gereği $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ tane A kümesinden B kümesine tanımlı fonksiyon yazılabilir.



İpucu

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise A kümesinden B kümesine tanımlı fonksiyon sayısı n^m dir.



Örnek

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x^2 + x) = 6x^2 + 6x - 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$f(x^2 + x) = 6 \cdot (x^2 + x) - 5$ fonksiyonunda $x^2 + x$ yerine A yazılırsa fonksiyon $f(A) = 6A - 5$ bulunur. Buradan $A = 2$ için $f(2) = 6 \cdot 2 - 5 = 7$ olur.



Örnek

Aşağıda, her gün kitap okuyan Gülbahar'ın 5 günlük bir süre içinde her bir güne ait okuduğu sayfa sayılarını gösteren bir tablo verilmiştir.

Günler	1.	2.	3.	4.	5.
Sayfa sayısı	50	70	60	50	80

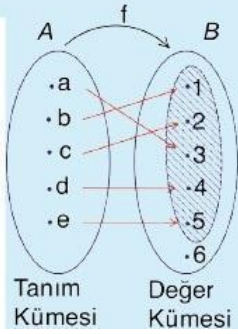
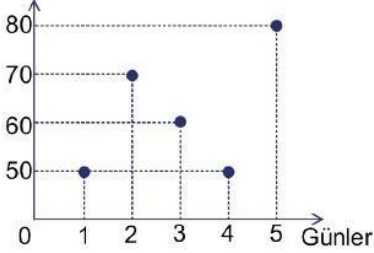
Bu bilgiler yardımıyla Gülbahar'ın günlere göre okuduğu sayfa sayısını veren grafiği oluşturunuz.



Çözüm

Tabloda Gülbahar'ın 1. gün 50, 2. gün 70, 3. gün 60, 4. gün 50, 5. gün 80 sayfa kitap okuduğu görüldüğü. Yatay eksenle günler, dikey eksenle okuduğu sayfa sayıları gösterilerek grafik aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Sayfa sayısı



A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f : A \rightarrow B$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) \neq B$ olduğundan (değer kümesinde en az bir eleman açıkta kalıyorsa) f fonksiyonuna **içine fonksiyon** denir. f içine fonksiyon ise kısaca **f içinedir** denir.

Yanda verilen f fonksiyonu içine fonksiyondur çünkü f nin görüntü kümesi $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ olup f nin değer kümesi olan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ne eşit değildir.



Örnek

Aşağıda tanım ve değer kümeleri verilen fonksiyonların içine fonksiyon olup olmadığını bulunuz.

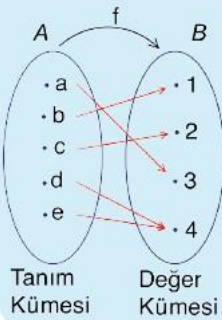
- a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x + 1$
b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, g(x) = x - 1$



Çözüm

- a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunda tanım kümesinden alınan $\forall x \in \mathbb{Z}$ için değer kümesindeki çift tam sayılar eşleşmeyeceğinden f fonksiyonu içine fonksiyondur.

- b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, g(x) = x - 1$ fonksiyonunda tanım kümesinden alınan $\forall x \in \mathbb{Z}$ için değer kümesinde açıkta eleman kalmayacağından g fonksiyonu **içine fonksiyon değildir**.



A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f : A \rightarrow B$ tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) = B$ olduğundan (değer kümesindeki her elemana karşılık tanım kümesinde en az bir eleman varsa) f fonksiyonuna **örtten fonksiyon** denir. f örtten fonksiyon ise kısaca **f örtendir** denir.

Yandaki f fonksiyonunun görüntü kümesi $f(A) = \{1, 2, 3, 4\}$ ve değer kümesi $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olup f fonksiyonunun görüntü kümesi ile değer kümesi aynıdır. Bu yüzden f örtten fonksiyondur.



Örnek

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 10\}$ ve $f : A \rightarrow B$ olmak üzere $f(x) = x^3 + 2$ fonksiyonunun örten fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonunda tanım kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntü kümesinin elemanları;

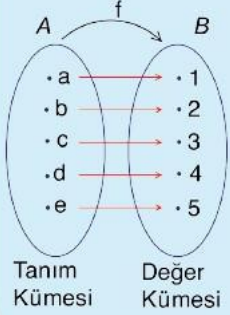
$$f(-1) = (-1)^3 + 2 = -1 + 2 = 1,$$

$$f(0) = (0)^3 + 2 = 0 + 2 = 2,$$

$$f(1) = (1)^3 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$f(2) = (2)^3 + 2 = 8 + 2 = 10 \text{ bulunur.}$$

Buna göre $f(A) = \{1, 2, 3, 10\}$ olur. Elde edilen görüntü kümesi, değer kümesine eşit ($f(A) = B$) olduğundan f fonksiyonu örten fonksiyondur.



Bir fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü tanım kümesindeki diğer elemanların görüntülerinden farklı ise bu fonksiyona **bire bir fonksiyon** denir.

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere

$f: A \rightarrow B$ tanımlanan f fonksiyonu her $x, y \in A$ ve $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ ya da $f(x) = f(y)$ için $x = y$ oluyorsa bu fonksiyon bire bir fonksiyondur.

Bir fonksiyon hem bire bir hem de örten ise bu fonksiyona **bire bir örten fonksiyon** denir. Örneğin yandaki şekilde verilen f fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyondur.



Örnek

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ fonksiyonunun bire bir fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ için

$2a \neq 2b \Rightarrow 2a + 5 \neq 2b + 5$ olur. Buradan $f(a) \neq f(b)$ olduğundan f fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

f fonksiyonu aynı zamanda örten olduğundan f fonksiyonunun bire bir örten fonksiyon olduğuna dikkat ediniz.

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

1. Aşağıdaki ifadelerin tanımlı olduğu aralıklarda fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 5$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-5}{x+1}$

ç) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \frac{3x}{2}$

2. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ ve $f(x) = 5x + 4$ olduğuna göre bu fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

3. Bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu "Her x gerçekte sayısını kendisinin karesinin 5 eksiği ile eşleştirmektedir." şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre f fonksiyonu için

a) 7'nin görüntüsünü bulunuz.

b) $f(-3)$ ifadesinin değerini bulunuz.

c) Görüntüsü 4 olan sayıları bulunuz.

4. Aşağıdaki fonksiyonların bire bir fonksiyon olup olmadığını bulunuz.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$

ç) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3$

5. Aşağıdaki fonksiyonların örten ya da içine fonksiyon olup olmadığını bulunuz.

a) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 5x + 2$

b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x^2 + 4$

c) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, g(x) = 7 - 2x$

ç) $g : (-2, 8) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x+2}$

6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = 3x$ ve $f(3) = 4$ olduğuna göre $f(1)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.

.....
Matematik Öğretmeni

.../.../2024
UYGUNDUR
Okul Müdürü

...