

PHYSIQUE
Durée : 4 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve

Les parties I, II et III sont indépendantes

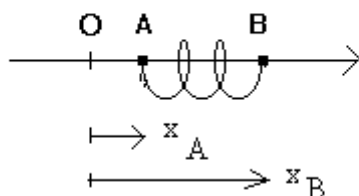
Dans la partie III, les sous-parties A et B sont très largement indépendantes

DIFFÉRENTES ÉCHELLES D'ÉNERGIE

I) ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE TRÈS SOMMAIRE D'UNE MOLÉCULE DIATOMIQUE :

On s'intéresse ici à une molécule diatomique AB constituant un système isolé. Dans toute cette partie, on se place dans un référentiel galiléen et les seules forces à considérer sont les forces indiquées (en particulier, on négligera toujours les poids des particules et toute force de frottement).

On va modéliser la molécule AB comme deux points matériels A et B, de masses m_A et m_B respectivement, astreints à se déplacer le long de l'axe Ox et reliés par un ressort de raideur k et de masse négligeable. On suppose que le centre d'inertie de la molécule est immobile. On utilisera les notations définies sur le schéma ci-dessous :



x_A et x_B sont les abscisses des points A et B respectivement, repérées sur l'axe Ox à partir d'une même origine O.

- 1) Rappeler l'expression de la force élastique subie par l'atome B de la part du ressort. Rappeler de même l'expression de la force élastique subie par l'atome A de la part du ressort. On notera L la longueur du ressort à un instant quelconque et L_0 sa longueur à vide.

Tournez la page SVP

- 2) Dans un déplacement élémentaire des atomes A et B, déterminer le travail élémentaire de ces deux forces. En déduire l'existence d'une énergie potentielle élastique E_p dont dérive l'ensemble des forces subies par les atomes A et B. On montrera que l'énergie potentielle E_p du ressort peut s'écrire :

$$E_p = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2 \quad \text{et on exprimera cette énergie potentielle } E_p \text{ en fonction de } k, x_A, x_B \text{ et } L_0.$$

Les forces considérées sont-elles des forces intérieures ou extérieures à la molécule ?

- 3) Etablir l'expression de l'énergie cinétique de la molécule en introduisant la grandeur : $X = x_B - x_A$. On montrera alors que :

$$\frac{dx_A}{dt} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} \frac{dX}{dt}$$

$$\frac{dx_B}{dt} = +\frac{m_A}{m_A + m_B} \frac{dX}{dt}$$

et on en déduira l'expression de l'énergie cinétique de la molécule en fonction de $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ et $\frac{dX}{dt}$.

- 4) En utilisant une méthode énergétique, établir l'expression de la fréquence ν_0 des oscillations de la molécule.

- 5) On montre en fait que la fréquence des oscillations de la molécule peut prendre les valeurs :

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\nu_0 \quad \text{où } n \text{ est } 0 \text{ ou un entier positif quelconque.}$$

Peut-on imaginer une méthode de mise en évidence de ces oscillations et de mesure éventuelle de ν_0 ?

6) APPLICATION NUMÉRIQUE :

- a) On mesure expérimentalement pour la fréquence ν_0 des oscillations : $\nu_0 = 8,5 \cdot 10^{13}$ Hz . À quel domaine du spectre appartient cette fréquence ? Calculer la longueur d'onde correspondante.
- b) En admettant que l'ordre de grandeur de l'énergie de vibration de la molécule est $h\nu_0$ (où h est la constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s), déterminer la valeur numérique de cet ordre de grandeur $h\nu_0$.

II) ÉNERGIE D'UN ÉLECTRON :

On considère un modèle très simplifié d'électron, où celui-ci est assimilé à une sphère homogène pleine de rayon R et de charge $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, au sein de laquelle la densité volumique de charge est uniforme.

- 1) Déterminer le champ électrostatique créé en tout point de l'espace (aussi bien en un point intérieur qu'en un point extérieur à la sphère) par cette distribution volumique de charge. Représenter le module du champ électrostatique en fonction de la distance r entre le point considéré et le centre de la sphère.
- 2) En déduire le potentiel électrostatique créé en tout point de l'espace (aussi bien en un point intérieur qu'en un point extérieur à la sphère) par cette distribution volumique de charge. On choisira le potentiel électrostatique nul infiniment loin de l'électron. Représenter le potentiel électrostatique en fonction de la distance r .
- 3) On montre que, s'il existe une distribution volumique de charge, caractérisée par la densité volumique de charge au point M : $\rho(M)$ dans un certain volume (Vol) de l'espace et si $V(M)$ est le potentiel électrostatique créé en ce point M de l'espace par cette distribution de charge, alors l'énergie W de cette distribution de charge est :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Vol}} \rho(M) V(M) d\tau(M) \quad (1)$$

- Vérifier l'homogénéité de la relation (1).
- Établir l'expression de l'énergie W de la sphère étudiée dans les questions 1) et 2) en fonction de ϵ_0 , e et R .
- 4) Si on appelle m la masse de l'électron, rappeler l'expression de l'énergie de masse de l'électron. En assimilant cette énergie de masse à l'énergie W déterminée plus haut, établir une expression du rayon R de l'électron en fonction de m , c (vitesse de la lumière dans le vide), e et ϵ_0 .

5) APPLICATION NUMÉRIQUE :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ SI} ; m = 9,1.10^{-31} \text{ kg} ; c = 3,0.10^8 \text{ m.s}^{-1} ; e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$$

- a) Déterminer numériquement l'énergie de masse de l'électron.
- b) Déterminer numériquement le rayon R de l'électron et comparer le résultat avec des ordres de grandeur connus. Commenter.

III) BILAN THERMIQUE DE LA TERRE :

On se propose d'effectuer un bilan thermique de la Terre. Dans ce modèle, on va négliger l'influence de l'atmosphère et on admettra que la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même est telle que l'on peut considérer la température uniforme à la surface de la Terre (température qu'on appellera T_T). La conductivité thermique k , la masse volumique et la capacité thermique massique de la Terre sont supposées être des constantes. Le rayon de la Terre est R_T . On rappelle que les roches radioactives au sein

de la Terre libèrent une certaine énergie caractérisée par la puissance volumique calorifique p dégagée par les réactions nucléaires.

Le Soleil, situé à la distance d de la Terre, a pour rayon R_s et il émet la puissance P_s .

A) Température superficielle de la Terre :

1-a) Le Soleil rayonne sa puissance P_s de façon isotrope. Sachant qu'il rayonne comme un corps noir, déterminer sa température superficielle T_s en fonction de P_s , R_s et σ .

1-b) APPLICATION NUMÉRIQUE : on donne : $P_s = 4,0.10^{26} \text{ W}$; $R_s = 6,960.10^8 \text{ m}$;
constante de Stefan $\sigma = 5,670.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-4}$.

Calculer T_s .

1-c) On rappelle la loi de Wien donnant la longueur d'onde λ_m du pic d'émissivité du corps noir en fonction de sa température : $\lambda_m T \approx 3 \text{ mm.K}$

1-c-1) Quel est l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du pic d'émissivité du Soleil ?

1-c-2) Situer cette longueur d'onde dans le spectre électromagnétique. Cela correspond-il à la perception de l'œil ? Commenter.

1-d) En déduire, en assimilant le Soleil à un point, la puissance P_T reçue par la Terre en fonction de P_s , R_T et d .

1-e) APPLICATION NUMÉRIQUE :

On donne : $R_T = 6,4.10^6 \text{ m}$; $d = 1,5.10^{11} \text{ m}$. Calculer numériquement P_T .

2) Évaluation de la puissance P_{rad} dégagée par les roches radioactives :

On va évaluer l'ordre de grandeur de la puissance calorifique radioactive totale dégagée par les roches radioactives : P_{rad} . La croûte terrestre est constituée de granit de masse volumique $\rho_g = 2,8.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Les principaux éléments radioactifs à prendre en compte dans la croûte terrestre sont l'uranium 238, le thorium 232 et le potassium 40.

238, 232 et 40 représentent les nombres de masse respectifs de ces trois éléments. On note, dans le tableau ci-dessous, le titre massique r d'un élément (c'est-à-dire, la masse de cet élément contenue dans l'unité de masse de la croûte terrestre), la période radioactive T de cet élément et l'énergie E dégagée par la désintégration d'un noyau de cet élément.

Elément	²³⁸ U	²³² Th	⁴⁰ K
T (en milliards d'années)	4,5	13,9	1,3
r	$4,7 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$
E (en Joules)	$7,7 \cdot 10^{-12}$	$6,4 \cdot 10^{-12}$	$1,4 \cdot 10^{-15}$

La masse molaire M, en grammes par mole, sera prise égale numériquement au nombre de masse.

On rappelle que le nombre de désintégrations par unité de temps d'une population n de noyaux radioactifs

de période T est donné par la relation : $-\frac{dn}{dt} = \frac{n}{T} \ln 2$.

2-a) Calculer littéralement puis numériquement les nombres, par unité de masse de granit, de noyaux U, Th et K, qu'on notera respectivement N_U , N_{Th} et N_K de chacun des éléments. On donne le nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

2-b) Calculer les puissances thermiques P_U , P_{Th} et P_K émises par unité de masse de granit par les noyaux U, Th et K respectivement.

2-c) En déduire la puissance volumique p dégagée par unité de volume de granit.

2-d) En déduire la puissance radioactive P_{rad} totale dégagée au sein de la Terre, en supposant cette puissance dégagée de façon uniforme dans toute la Terre. On admettra que les données relatives à la croûte terrestre restent les mêmes au sein de toute la Terre.

3) En supposant que la Terre rayonne comme un corps noir de température T_T , donner l'expression de la puissance rayonnée par la Terre en fonction de R_T , T_T et σ .

4) En déduire, par application du premier principe de la thermodynamique, l'équation donnant la température superficielle de la Terre en régime permanent.

5) Evaluation numérique de T_T :

5-a) Donner alors une évaluation numérique de la température superficielle de la Terre, en admettant, comme dans la question III)A)2)d), que les données relatives à la croûte terrestre et concernant les roches radioactives restent les mêmes partout au sein de la Terre. Si l'on n'a pas résolu complètement la question III)A)2)c), on pourra prendre : $p \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$.

5-b) Refaire le calcul de T_T en supposant la Terre dépourvue de sources radioactives.

5-c) Commenter les résultats. De quel effet faudrait-il tenir compte pour une évaluation plus réaliste de T_T ?

- 6) En utilisant la loi de Wien, donner la longueur d'onde du maximum de rayonnement de la Terre. Dans quel domaine ce rayonnement se situe-t-il ?

B) Profil de température au sein de la Terre :

On va faire un bilan thermodynamique sur une sphère dont le centre est le centre de la Terre et de rayon $r < R_T$.

- 1) Calculer, en supposant toujours que la puissance volumique calorifique p dégagée par les réactions nucléaires est uniforme au sein de la Terre, la puissance radioactive dégagée au sein de la sphère de rayon $r < R_T$.
- 2) On rappelle la loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -k \vec{\text{grad}} T$ exprimant le vecteur densité de flux thermique dans un milieu où la température T n'est pas uniforme, k étant la conductivité thermique du milieu, grandeur positive qu'on supposera uniforme dans tout le milieu considéré.
- 2-a) Donner la définition du vecteur densité de flux thermique. Donner la dimension de ce vecteur densité de flux thermique.
- 2-b) Donner la dimension de k .
- 2-c) Qu'exprime le signe moins dans la loi de Fourier ?
- 2-d) Expliquer pourquoi la température ne va dépendre que de la distance au centre, dans la Terre. En déduire la direction du vecteur $\vec{j}_Q$.
- 2-e) Définir le flux thermique sortant de la sphère de rayon r .
- 3) Par application du premier principe de la thermodynamique à la sphère centrée sur le centre de la Terre et de rayon r , en régime permanent, établir l'équation différentielle vérifiée par la température au sein de la Terre.
- 4) Intégrer cette équation pour obtenir l'expression de la température T en fonction de r .
- 5) Cette dernière relation fait apparaître une constante. Indiquer comment on peut la déterminer à l'aide des résultats de la question III) A) 5).
- 6) Donner alors l'expression de $T(r)$ en fonction de p , k , r , T_T , R_T .
- 7) Tracer l'allure du profil de température $T(r)$.

8) Déterminer la température au centre de la Terre.

9) APPLICATION NUMÉRIQUE :

Calculer l'ordre de grandeur de la température au centre de la Terre, dans le cadre de ce modèle (Terre homogène, toutes grandeurs physiques uniformes). On donne : $k = 2,3$ unité SI. Si l'on n'a pas calculé numériquement p dans la partie III)A), on pourra prendre : $p \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ W.m}^{-3}$. Si l'on n'a pas calculé numériquement T_T dans la partie III)A), on prendra pour T_T une valeur raisonnable. Commenter le résultat obtenu.

FIN