CHƯƠNG 3. DÃY SỐ- CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp thì có thể làm như sau:

- Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.
- Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Đó là phương pháp quy nạp toán học, hay còn gọi tắt là phương pháp quy nạp.

Một cách đơn giản, ta có thể hình dung như sau: Mệnh đề đã đúng khi $n = 1$ nên theo kết quả ở bước 2, nó cũng đúng với $n = 1 + 1 = 2$. Vì nó đúng với $n = 2$ nên lại theo kết quả ở bước 2, nó đúng với $n = 2 + 1 = 3, \ldots$ Bằng cách ấy, ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên) thì:

- Bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$;
- Bước 2, giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đẳng thức

Ví dụ 1 . Chứng minh rằng: $1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1)$, với $n \in N^*$ (1)

Lời giải

- Bước 1: Với n=1, vế trái bằng 1.2=2, vế phải bằng 2. hệ thức (1) đúng
- Bước 2: Đặt vế trái bằng S_n.

Giả sử hệ thức (1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là :

$S_k = 1.2 + 2.5 + \ldots + k(3k-1) = k^2(k+1)$ (giả thiết quy nạp)

Ta phải chứng minh rằng (1) cũng đúng với n=k+1, tức là

$$S_{k+1} = (k+1)^2(k+2)$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)\left[3(k+1-1)\right] = k^2(k+1) + (k+1)(3k+2)$$

$$= (k+1)(k^2 + 3k + 2) = (k+1)^2(k+2)$$

Vậy hệ thức (1) đúng với mọi $n \in N^*$

Dạng 2. Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $n \ge 3$ ta có: $3^n > n^2 + 4n + 5$ (1)

Lời giải

Vôùi n=3, veátraùi baèng 27, coøn veáphaùi baèng 26.

Baátñaúng thöùc (4) ñuùng.

Giaûsö�baátñaúng thöùc (4) ñuùng vôùi n=k $\ge$ 3. töùc laø

$$3^k > k^2 + 4k + 5. \quad (1')$$

Ta phaûichöùng minh noùcuõng ñuùng vôùi n=k+1, töùc laø

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$$

Thaätvaäy, nhaân hai veácuûa baátñaúng thöùc (1') vôùi 3 ta coù

$$3^{k+1} > 3k^2 + 12k + 15 = (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + 2k^2 + 6k + 5$$

Vì $2k^2 + 6k + 5 > 0$ neân $3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$

Ñaúng thöùc (1) ñaõñöôïc chöùng minh

Dạng 3. Chứng minh một tính chất

Ví dụ. Chứng minh rằng: $n^7 - n$ chia heátcho 7 vôùimoïi $n \in N^*$

Giải

Ñaët $A_n = n^7 - n$.

Khi n=1 thì $A_1 = 0$ chia heátcho 7

Giaûsö�ñaõcoù $A_k = (k^7 - k) \vdots 7$

Thaätvaäy, aùp duïng coâng thöùc nhòthöùc Niu-ton ta coù

$$A_{k+1} = (k+1)^7 - (k+1) = k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - k - 1$$

$$= k^7 - k + 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)$$

Theo giaûthieátquy naïp thì $A_k = k^7 - k$ chia heátcho 7, do ñoù $A_{k+1} \vdots 7$

Vaäy $n^7 - n$ chia heátcho 7 vôùimoïi $n \in N^*$

Dạng 4. Một số bài toán khác

Ví dụ. Chứng minh rằng: $\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

Giải

Ñaëtveátraùcuûa heäthöùc (1) baèng C_n.

Khi n=1, veátraùbaèng $\sqrt{2}$, veáphaûibaèng $2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$; heäthöùc (1) ñuùng

Giaûsöûheäthöùc (1) ñuùng vôùin=k ≥ 1, töùlaø $C_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$

ta phaûichöùng minh: $C_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$

Thaätvaäy, töùgiaûthieátquy naïp ta coù

$$C_{k+1} = \sqrt{2+C_k} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} \text{ (vì } \cos\frac{\pi}{2^{k+2}})$$

Vaäy heäthöùc (1) ñaõñöôïc chöùng minh

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng:

A. $n = 1$. **B.** $n = p$. **C.** $n > p$. **D.** $n \geq p$.

Lời giải.

Chọn B

Câu 2: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k > p$. **B.** $k \geq p$. **C.** $k = p$. **D.** $k < p$.

Lời giải.

Chọn B

Câu 3: Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- Bước 1, kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = p$.
- Bước 2, giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k+1$.

Trong hai bước trên:

A. Chỉ có bước 1 đúng. **B.** Chỉ có bước 2 đúng. **C.** Cả hai bước đều đúng. **D.** Cả hai bước đều sai.

Lời giải.

Chọn C

Câu 4: Một học sinh chứng minh mệnh đề "$8^n + 1$ chia hết cho $7, "n \in \mathbb{N}^*"$ $(*)$ như sau:

· Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$, tức là $8^k + 1$ chia hết cho 7.

· Ta có: $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$, kết hợp với giả thiết $8^k + 1$ chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Lời giải.

Chọn D

Thiếu bước 1 là kiểm tra với $n = 1$, khi đó ta có $8^1 + 1 = 9$ không chi hết cho 7.

Câu 5: Cho $S_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3 = \frac{1}{12}$. **B.** $S_2 = \frac{1}{6}$. **C.** $S_2 = \frac{2}{3}$. **D.** $S_3 = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Chọn C

Lưu ý rằng S_n là tổng n số hạng đầu tiên nên.

Do đó với $n = 2$, ta có $S_2 = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} = \frac{2}{3}$.

Câu 6: Cho $S_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{n-1}{n}$. **B.** $S_n = \frac{n}{n+1}$. **C.** $S_n = \frac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n = \frac{n+2}{n+3}$.

Lời giải.

Chọn B

Cách trắc nghiệm: Ta tính được $S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{3}{4}$. Từ đó ta thấy quy luật là từ nhỏ hơn mẫu đúng 1 đơn vị.

Cách tự luận. Ta có $S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{2}{3},\ S_3 = \frac{3}{4}$ ¾ ¾ dự đoán $S_n = \frac{n}{n+1}$.

· Với $n = 1$, ta được $S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1}$: đúng.

· Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k$ $(k \geq 1)$, tức là $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$.

· Ta có $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

Û $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

Û $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)}$

Û $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$. S

uy ra mệnh đề đúng với $n = k+1$.

Câu 7: Cho $S_n = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{n-1}{2n-1}$. **B.** $S_n = \frac{n}{2n+1}$. **C.** $S_n = \frac{n}{3n-2}$. **D.** $S_n = \frac{n+2}{2n+5}$.

Lời giải.

Chọn B

Cho $\begin{cases} n = 1 \text{ ¾ ¾ } S_1 = \frac{1}{3} \\ n = 2 \text{ ¾ ¾ } S_2 = \frac{6}{15}. \\ n = 3 \text{ ¾ ¾ } S_3 = \frac{3}{7} \end{cases}$ Kiểm tra các đáp án chỉ cho B thỏa.

Câu 8: Cho $P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ với $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = \frac{n+1}{n+2}$. **B.** $P = \frac{n-1}{2n}$. **C.** $P = \frac{n+1}{n}$. **D.** $P = \frac{n+1}{2n}$.

Lời giải.

Chọn D

Vì $n \geq 2$ nên ta cho $\begin{cases} n = 2 \Rightarrow P_2 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} \\ n = 3 \Rightarrow P_3 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Kiểm tra các đáp án chỉ cho D thỏa.

Câu 9: Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

B. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

C. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải.

Chọn D

Bằng cách thử với $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ là ta kết luận được.

Câu 10: Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, số $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

II) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Lời giải.

Chọn A

- Ta chứng minh I) đúng.

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1^3 + 3.1^2 + 5.1 = 9 \vdots 3$: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k$ $(k \geq 1)$, tức là $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k \vdots 3$.

Ta có $u_{k+1} = (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3k^2 + 9k + 9 = u_k + 3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$. Kết thúc chứng minh.

- Mệnh đề II) sai vì với $n = 1$, ta có $VT = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{12}{24} > \frac{13}{24}$: Vô lý.