УДК: 551.4.012
DOI:10.58494/esai.23(7).2023.15

*Мамаюсупов Маккамбай Шарипович, ОшМУ,
ф.м.и.к., доцент,
E-mail: Mamaiusupov.m@gmail.com
Набиева Таттыбүбү Суюнбаевна, ОшМУ,
магистрант,
E-mail: tatybubunabieva@gmail.com*

ОРТО МЕКТЕПТЕ ОКУТУЛУУЧУ ВЕКТОРЛОР ТЕМАЛАРЫН ПРИКЛАДДЫК МИСАЛДАР АРКЫЛУУ БЫШЫКТООГО КАРАТА УСУЛДУК СУНУШТАР

Аннотация. *Макалада берилген жасалма векторлорго карата амалдарды аткарууга машыктыруу аркылуу, векторлор менен болгон амалдар боюнча өтүлгөн сабактардын жугумдуулугуна толук жетишүү мүмкүн эмес болгондуктан, турмуш практикасында чечүүнү талап кылган реалдуу маселелердин мазмунун векторлор аркылуу көрсөтмөлүү элестерин моделдештирип чыгаруу аркылуу, векторлор менен болгон амалдарды жана касиеттерди колдоно билүүгө машыктыруу аркылуу, өтүлгөн сабактын жугумдуулугун арттыруу илимий-усулдук тажрыйбасы жазылган. Векторлор аркылуу турмуш практикасында чечүүнү талап кылган реалдуу маселелердин мазмунун көрсөтмөлүү элестерин моделдештирип, векторлордун касиеттерине жана амалдарына таянып, берилген маселени чечүүгө машыктыра кетүү зарылдыгы көрсөтүлгөн.*

Түйүндүү сөздөр: *Вектор, үч бурчтук, Пифагордун теоремасы, бурчтун косинусу, координаттык система.*

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО УКРЕПЛЕНИЮ ТЕМЫ “ВЕКТОРЫ” В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ ЧЕРЕЗ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Аннотация. *В статье изложен научно-методический опыт повышения переносимости пройденных уроков с использованием приемов и свойств с векторами,посредством моделирования наглядных представлений через векторы содержания реальных задач,требующих решения в практической жизни,так как невозможно в полной мере достичь усвоения представленных в статье приемов и свойств с искусственными векторами.Через векторы можно моделировать наглядные представления содержания реальных задач,требующих решения в реальной практике,и,опираясь на свойства и приемы векторов,обучать решению данной задачи.*

Ключевые слова: *Вектор, треугольник, теорема Пифагора, косинус угла, координатная плоскость.*

THE TOPIC OF VECTORS AT SCHOOL THROUGH APPLIED TASKS AND SOME METHODOLOGICAL SUGGESTIONS FOR CHECKING THEM

Annotation. *Since its impossible to fully achieve the significance of the lessons on operationswith vectors, by teaching them how to perform operations with artificial vectors given in the article, it is necessary to solve a number of real problems that require solutions in life practice , the scientific and methodological experience of increasing the significance of the lesson through teaching the ability to use techniques and properties of working with vectors by modeling visual representations through vectors of the content of real tasks that require solutions in practical life is presented .Modeling visual representations of the content of real problems requiring solutions in life practice by means of vectors, relying on the properties and techniques, also it's showered the necessity of solving the tasks by training.*

Key words: *vector, triangle, Pythagorean theorem. ,cosine of angle, coordinate system.*

Кыргызстандын мектеп билим берүү системасында “Векторлор” темасы 1963-жылдан баштап гана окутулуп келет. Бул теманы мектеп математикасында окутуунун максаты жана практикалык мааниси жөнүндө өтө аз илимий-усулдук изилдөөлөр жүргүзүлгөнүнө карабастан, “Векторлор” темасынын окуучулар үчүн өздөштүрүү татаал экендигин советтик педагогдор А.Д.Александров, Л.С.Атанасян, Г.П.Бевз, В.Г.Болтоянский ж.б.у.с., изилдөөлөрдө белгиленип кеткен. Мектеп геометриясында “Векторлор” темасын окутуу усулдары боюнча: С.В.Бабаджанян, С.Р.Джапров, А.Иванов, А.К.Кагазбаева, Н.Я.Милина, В.Г.Михеева ж.б. КМШнын илимпоз-педагогдору менен катар эле И.Б Бекбоев, А.А.Бөрүбаев, А.А.Айылчиев, С.К.Кыдыралиев, А.Б.Урдавлетова, М.Ш.Мамаюсупов сыяктуу кыргыз илимпоз-педагогдору илимий-усулдук макалаларды, окуу китептерин жазып келишет.

КМШ аймагында мектеп билим берүү системасында математика предмети алгебра жана геометрия деген бөлүктөргө бөлүнүп окутулганы менен, өнүккөн Батыш өлкөлөрүндө бөлүнбөгөн бүтүн предмет катары окутулат. Анткени, аларда математика илимин “илимдердин падышасы”, “акылдын гимнастикасы” катарында окутпай, аалам чөйрөсүн кубулуштарын таанып үйрөнүүчү тил катарында окутушат. Чынында эле, жазма тил пайда болгонго чейин дүйнөнүн көзү менен көрүп, колу менен кармоого мүмкүн болгон бөлүгүн гана эстеп, акылга тутуп пайдалана алсак, 36 тамга менен жазма тил пайда болгон соң: унутканды жазып, башкалардын жазып калтырган өнөрү менен чыгармачылыктарын үйрөнүп, дүйнө чөйрөсүн таануу мүмкүнчүлүктөрүбүз кеңейген. Бирок дүйнө чөйрөсүнүн предметтери бири-биринен чоңдук жана сандык өлчөмдөрү менен айырмаланып тургандыктан, аларды айырмалап толук таануу үчүн жазма тил жетишсиздик кылып, адамзат жаңы математикалык тилди ойлоп тапкан. Математикалык тилдин тамгалары сандар, амал белгилери, жана $\int$, $\log_a x$, $\lim_{x\to a} f(x)$, $\vec{b}, \dots$ – сыяктуу чексиз көп символ-белгилер болушуп, алардын жардамы предметтер менен кубулуштардын математикалык тилде жазылган сүйлөмдөрүн (моделдерин) түзүшкөн. Бүгүнкү санариптик доордо математикалык тилдин жаңы формасы болгон “компьютердик тил” келип чыгууда. Ошондуктан векторлорду геометриялык түшүнүк деп чектебей эле, жалпы математикалык (физикалык, химиялык, ж.б.) сабактарда кезигүүчү маселе-мисалдарды чыгарууда, далилдөөлөрдү жүргүзүүдө колдоно беребиз.

Изилдөө материалдары жана методдору.

Векторлорду колдонуунун айрым артыкчылыктарын белгилеп кетсек:

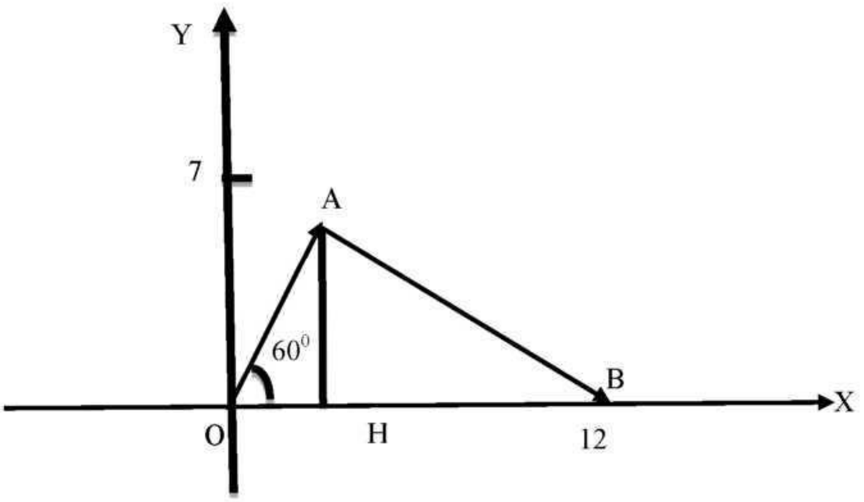
- Айрым математикалык маселе-мисалдарды чыгаруу менен теоремаларды далилдөөдө векторлор менен болгон амалдар жана касиеттерди пайдалануу аркылуу, маселени чыгаруу менен далилдөөлөрдү көптөгөн баш адаштырма эсептөөлөрсүз эле, окуучуларга көрсөтмөлүү жөнөкөй элестер аркылуу жүргүзүүгө болорун үйрөтөт.
- Векторлор математиканын бардык тармактары менен катар, математикага тиешеси жоктой болуп сезилген география, жаратылыш таануу, физика, химия сабактарында, аба-суу транспорт системасында, метрология менен сейсмологияда кеңири колдонулуп, предмет аралык байланыштарды бекемдейт жана алардын баары жаш муунга курчап турган жаратылыш чөйрөсүн сырларын математикалык тилде үйрөнүп түшүнүүгө жана өз келечек жашоосунда колдоно билүүгө машыктырат.

Ошондуктан бул макалада Ноокат районунун “Найман” атындагы орто мектебинин $9^а$ жана $9^б$ –класстарынын биринде жүргүзүлгөн илимий-усулдук тажрыйбабыздын жүрүшү менен бөлүшүп, натыйжасы жарыяланды. Тажрыйбага катышкан $9^б$ – классындагы жалпы 14 окуучулар менен тажрыйбага катышпаган $9^а$ – классындагы 16 окуучулардын баарына бирдей эле векторлор темалары окутулганы менен, тажрыйба жүргүзүлгөн $9^б$ – классында окутулган сабактарды бышыктоо, вектордук анализдин элементтерин колдонуп үч бурчтукка карата берилген практикалык маселе-мисалдарды чыгаруу аркылуу жүргүзүлсө, тажрыйбага катышпаган $9^а$ – классында, расмий окуу китебиндеги [1] векторлор темаларына берилген мисалдарды иштөө менен чектелди. Тажрыйбанын соңунда окуучулардын өтүлгөн векторлор

темасы боюнча өздөштүрүү деңгээлдери салыштырылып, илимий-усулдук сунуш катары макала жазылды.

Бышыктоодо колдонулган айрым мисалдарга токтолуп өтөбүз:

1.Үч бурчтуктун жандаш эки жактарынын узундуктары 7 жана 12 болушуп, алардын арасындагы бурч $\varphi = 60^{\circ}$ экендиги белгилүү. Үч бурчтуктун аянтын тапкыла (*1-чийме*) [2].



1-чийме. Үч бурчтук

Чыгаруу: Берилген үч бурчтукту Oxy координаттык системасында 1-чиймеде көрсөтүлгөн абалда жайгаштыралы. Анда үч бурчтуктун OB- жагын Ox-абцисса огунда жаткан модулу $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 12$ болгон $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ вектору, ал эми OA-жагын O борборунан башталып, модулу $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 7$ болгон $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ вектору, $\varphi = 60^{\circ}$ бурчун $\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ векторлорунун арасындагы бурч деп эсептөөгө болот. Үч бурчтуктун чокулары $\mathrm{O}(0;0), \mathrm{B}(12;0), \mathrm{A}(x_h;y_h)$ менен $\mathrm{H}(x_h;0)$ чекитин координаталары белгилүү болгондуктан, векторлорду координаталары менен жаза алабыз:

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{O}};\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{O}}\} = \{12 - 0;\ 0 - 0\} = \{12;\ 0\}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{O}};\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{O}}\} = \{x_h - 0;\ y_h - 0\} = \{x_h;\ y_h\}$.

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ менен $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүн табалы. Векторлорду скалярдык көбөйтүүдө, векторлор көбөйтүлбөстөн, аларды мүнөздөгөн сандык чоңдуктар көбөйтүлгөндүктөн, скалярдык көбөйтүүнүн аныктамасы боюнча

$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \cdot \cos 60^{\circ} = 12 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 42$ көрүнүштө эсептөөгө болот. Экинчи жактан, скалярдык көбөйтүүнү векторлордун координаталары боюнча эсептөө формуласын пайдалансак,

$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = x_{\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \cdot x_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}} + y_{\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \cdot y_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}} = 12 \cdot x_h + 0 \cdot y_h = 12 \cdot x_h$ келип чыгып, экөөсүн теңдештирип, A чекитинин абциссасын табабыз:

$12 \cdot x_h = 42 \Rightarrow x_h = \frac{42}{12} = 3{,}5$.

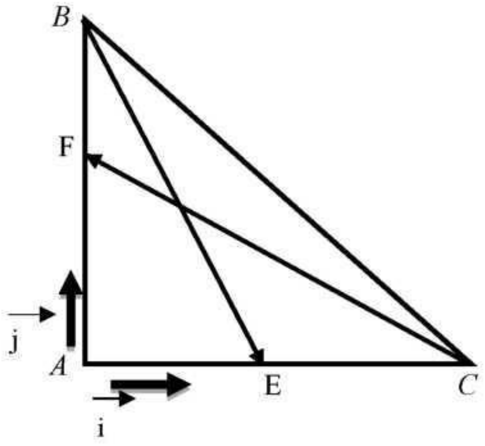
Мындан тик бурчтуу $\Delta\mathrm{OAH}$ үч бурчтугуна Пифагордун $|\mathrm{AH}|^2 + |\mathrm{OH}|^2 = |\mathrm{OA}|^2$ теоремасын колдонуп, $\Delta\mathrm{OAB}$ үч бурчтугунун $|\mathrm{AH}|$ бийиктигин табабыз. $|\mathrm{AH}|^2 = |\mathrm{OA}|^2 - |\mathrm{OH}|^2 = 12^2 - (3{,}5)^2 = 144 - 12{,}25 = 131{,}75 \Rightarrow$

$|\mathrm{AH}| = \sqrt{131{,}75} \approx 11{,}48$. Демек $\Delta\mathrm{OAB}$ үч бурчтугунун аянты

$S_{\Delta\mathrm{OAB}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{AH}| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot 11{,}49 \cdot 12 = 68{,}88$ аянт бирдиги.

Үй тапшырмасы катарында катарында [2] - электрондук окуу китебиндеги “2.2.4. Векторлордун арасындагы бурчтун косинусу. Багыттоочу косинустар” - темаларын бышыктоодо пайдаланылган 9, 10 - мисалдарды талдап, чыгарылыштарын үйрөнүп келүүнү бердим.

2. Тең капталдуу ΔABC тик бурчтуу үч бурчтугун тар бурчтарын чокуларынан жүргүзүлгөн медианалардын кесилишинен пайда болгон φ туюк бурчун тапкыла *(2-чийме).* [4]



2-чийме. Тең капталдуу ΔABC *тик бурчтуу үч бурчтугун тар бурчтарын чокуларынан жүргүзүлгөн медианалардын кесилиши*

Чыгаруу: Тик бурчтуу ΔABC үч бурчтугун жактарын жана жүргүзүлгөн медианаларын векторлор деп алып, А-координата башталмасы, медианаларды $CF = \overrightarrow{CF}$, $BE = \overrightarrow{BE}$ векторлору деп түшүнсөк, анда изделүүчү бурч $\varphi = (\overrightarrow{BE} \,\hat{,}\, \overrightarrow{CF})$ векторлорун арасындагы бурчка барабар болорун көрөбүз. Тең капталдуу жактардын (катеттердин) узундугун k санына барабар деп алып, тик бурчтуу A чокусуна тургузулган $\vec{i}, \vec{j}$ бирдик векторлорун колдонуп,

$$\overrightarrow{AC} = k\vec{i}, \quad \overrightarrow{AB} = k\vec{j}, \; AE = \frac{k}{2}\vec{i}, \; \overrightarrow{AF} = \frac{k}{2}\vec{j},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -k\vec{j} + \frac{k}{2}\vec{i} = \frac{k}{2}\vec{i} - k\vec{j},$$

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = -k\vec{i} + \frac{k}{2}\vec{j}$$

теңдештиктерине ээ болобуз. Ошентип $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ векторлорун базистик векторлор системасы катарында кабыл алып, $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ векторлорун бул базиске карата координаталары аркылуу $\overrightarrow{BE} = \frac{k}{2}\cdot\vec{\imath} - k\cdot\vec{\jmath} = \left\{\frac{k}{2};\, -k\right\}$,

$\overrightarrow{CF} = -k\cdot\vec{\imath} + \frac{k}{2}\cdot\vec{\jmath} = \left\{-k;\, \frac{k}{2}\right\}$ көрүнүштө жаза алабыз.

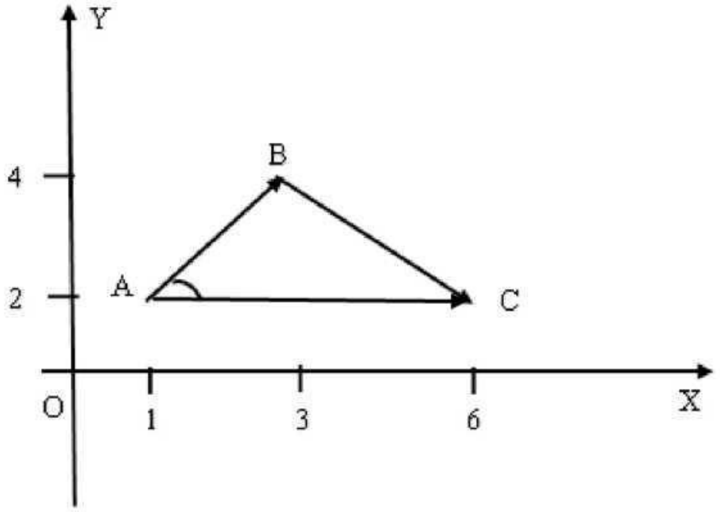
Бул эки векторлордун арасындагы бурчтун формуласына ылайык

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CF}\right|} = \frac{\frac{k}{2}\cdot(-k) + (-k)\cdot\frac{k}{2}}{\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + (-k)^2}\cdot\sqrt{(-k)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}} = \frac{-k^2}{\sqrt{\frac{5k^2}{4}}\sqrt{\frac{5k^2}{4}}} = \frac{-k^2}{\frac{5k^2}{4}} = -\frac{4}{5}$$

эсептеп, $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$ же $\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \arccos(-0{,}8) = 36^o44'$

жообуна ээ болобуз.

2. ΔABC үч бурчтугу $A(1;\ 2),\ B(3;\ 4),\ C(6;\ 2)$ чокуларын координаталары менен берилген, анын A чокусундагы ички бурчту тапкыла (*3-чийме*) [3].



3-чийме. ΔABC *үч бурчтугу* $A(1;\ 2),\ B(3;\ 4),\ C(6;\ 2)$ *чокуларыынн координаталары менен*

Чыгаруу: ▷ A чокусундагы ички бурч $\overrightarrow{AB}$ *менен* $\overrightarrow{AC}$ векторлорун арасындагы φ бурчуна барабар болот. Берилген векторлордун

$\overrightarrow{AB} = \{3-1;\ 4-2\} = \{2;\ 2;\},\quad \overrightarrow{AC} = \{6-1;\ 2-2\} = \left\{5;\ \ 0\right\}$ координаталарын жана

$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{2^2+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\qquad \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{5^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$ узундуктарын табабыз.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ векторлорунун арасындагы бурчтун косинусу

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right)}{\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right|} = \frac{2\cdot 5 + 2\cdot 0}{2\sqrt{2}\cdot 5} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ болгондуктан,

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^0$$ келип чыгат.

Ошентип, тажрыйба жүргүзүлгөн $9^б$ – классында окутулган векторлор темаларын бышыктоону, жогорудагы практикалык муктаждыктарды чечүүгө карата түзүлгөн маселелерди чыгаруу аркылуу жүргүзүп, тажрыйбага катышпаган $9^а$ – классында [1] окуу китебиндеги векторлор менен болгон амалдарга карата берилген маселе-мисалдар гана иштетилди. Векторлор темасы окутулуп бүткөн соң, окуучуларынын векторлор менен болгон амалдарды өздөштүрүү деңгээлин салыштыруу максатында, эки класстын ар биринде бирдей мисалдардан түзүлгөн: векторлорду кошуу, санга көбөйтүү, скалярдык көбөйтүү, векторлордун арасындагы бурчту эсептөө боюнча текшерүү иштери алынып, төмөндөгү өздөштүрүү таблицасы түзүлүп (1-табл.), векторлорду окутуунун максаттуулугу жөнүндөгү окуучулардын жазма пикирлери үйрөнүлдү.

Өздөштүрүү таблицасы көрсөткөндөй, тажрыйба жүргүзүлгөн $9^б$-классында өздөштүрүү деңгээли жогору 71% болуп, окуучулар жазма пикирлеринде векторлорду

чөйрөнү таанууда жана жашоо практикасында керектүү деп эсептешерин жазышкан. Вектордун модулу болсо, ал сүрөттөгөн кубулуштун чоңдугун көрсөтөрүн айтышып, багыт боюнча кыймылдаган аба агымдарынын, ракеталардын кыймыл жолдорун аныктоодогу векторлор менен болгон амалдардын ролун түшүнүп, векторлорду өздөштүрүүгө болгон кызыгууларынын артканын белгилешкен.

1-таблица.

Өздөштүрүү таблицасы

Баалар / Окуучу	5	4	3	2
1) $9^{а}$-кл. 16	2 Проценти 13%	5 Проценти 31%	9 Проценти 56%	0 Проценти %
2) $9^{б}$-кл. 14	3 Проценти 21%	7 Проценти 50%	4 Проценти 29%	0 Проценти %

Ошондуктан векторлорду сандар сыяктуу эле символ-тамгалар катары кабыл алышып, сандык чондуктары боюнча толук таанууга болбой турган багыттуу кыймылдарды математикалык тилдеги моделдери аркылуу үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк берерин жана векторлор кайсы бир багыттуу чоңдуктарды сүрөттөөчү модель-символ болорун жазышкан. Ал эми тажрыйбага катышпаган $9^{а}$-класстагылар болсо, векторлорду турмуш практикасында колдонбой турган формалдуу символдор сыяктуу окушканын айтышып, бул темага маани беришпегендиктен өз-дөштүрүүнүн (44%) төмөн болгонунун себебин аныктадык.

Корутунду

Ошентип, илимий-усулдук тажрыйбабыздын жыйынтыгы менен төмөндөгүдөй усулдук сунуш берүүнү чечтик:

1) берилген жасалма векторлорго карата амалдарды аткарууга машыктыруу аркылуу, векторлор менен болгон амалдар боюнча өтүлгөн сабактардын жугумдуулугуна толук жетишүү мүмкүн эмес.

2) векторлор аркылуу турмуш практикасында чечүүнү талап кылган реалдуу маселелердин мазмунун көрсөтмөлүү элестерин моделдештирип, векторлордун касиеттерине жана амалдарына таянып, берилген маселени чечүүгө машыктыра кетүү зарыл.

Макалада Ноокат районуна караштуу “Найман” орто мектебинин 9-а жана 9-б класстарынын окуучуларына жургузулгон эксперименттин жыйынтыктары көрсөтүлдү.

Натыйжада орто мектептерде окутулуучу векторлор темаларын окуу китебинде берилген мисал маселелер менен гана окутууга караганда, прикладдык мисал маселелер менен бышыктоо эң жакшы жыйынтыктарга жетүүгө мүмкүнчүлүк берээри изилденди.

Пайдаланылган адабияттар:

1. И.Б.Бекбоев, А.А.Борубаев, А.А.Айылчиев. Геометрия: Орто мектептин 7-9-кл.учун окуу китеби. -Б.:Билим-компьютер. -2015. -288 б.

2. Мамаюсупов М. Ш. Жогорку математика боюнча окума (1-бөлүк) электрондук окуу китеби. – Ош.: -2014. – 2018. – 320 б.

3. Урдавлетова А.Б., Кыдыралиев С.К., Керимкулова Э.Дж. Треугольники на языке аналитической геометрии. Известия ВУЗов Кыргызстана. -Бишкек, 2018. -№6. - С. 313-316.

4. Урдавлетова А. Б., Кыдыралиев С. К., Бурова Е. С. Возвышенная геометрия, нищменная алгебра? Нет, современная математика. /Статья 11-с. Журнал “Вестник КРСУ”. -2019. –Т.19. -№8. –С.10-14

5. Рыбкин Н. Геометрия боюнча маселелер жыйнагы,1972-ж.

6. Барыбин К.С. Геометрия,1974г