

TÓM TẮT LÝ THUYẾT HÌNH 9

1. Hệ thức cơ bản trong tam giác vuông

Một tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (hình 1)

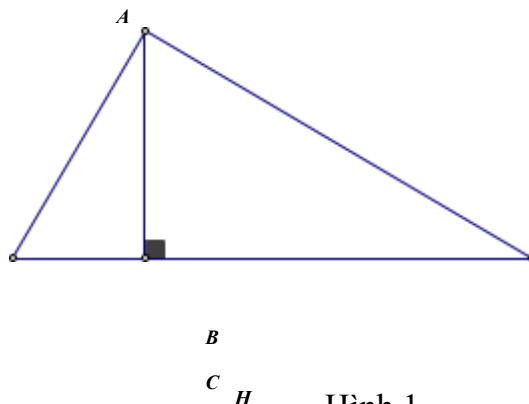
✓ Ta có:

- $AB^2 = BH \cdot BC$ và $AC^2 = CH \cdot BC$

- $AH^2 = HB \cdot HC$

- $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$



Hình 1

- $\sin B = \frac{AC}{BC}$; $\cos B = \frac{AB}{BC}$; $\tan B = \frac{AC}{AB}$; $\cot B = \frac{AB}{AC}$

- α là góc nhọn thì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

- α, β là hai góc nhọn và $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì $\sin \alpha = \cos \beta$; $\tan \alpha = \cot \beta$.

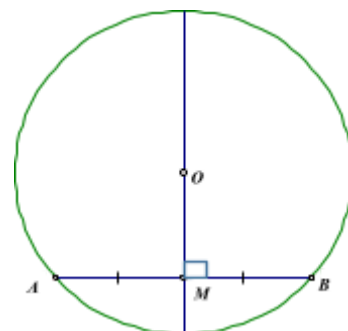
2. Đường tròn

- **Đường kính và dây cung:** (hình 2)

- Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính

- Trong một đường tròn đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

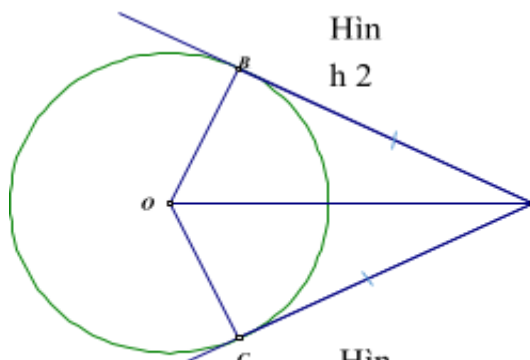
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.



Hình 2

- **Tiếp tuyến của đường tròn** (hình 3)

- AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn



Hình 3

(O) tại B và C

□ AB □

□ AO là phân giác

□
□ B □ AC

..

□ OA là phân giác BOC

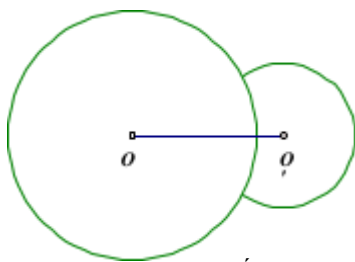
• **Vị trí tương đối của hai đường tròn** (hình 4)

- Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R \geq r$

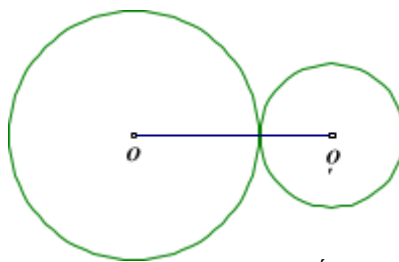
Cắt nhau $\Leftrightarrow R - r < OO' < R + r$

Tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow OO' = R + r$

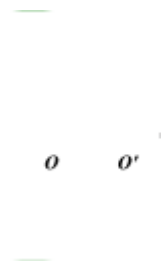
Tiếp xúc trong $\Leftrightarrow OO' = R - r$



Cắt nhau



Tiếp xúc ngoài



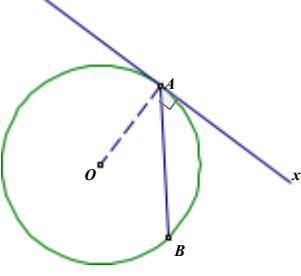
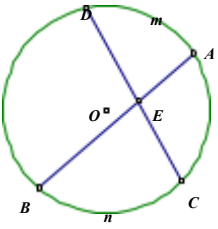
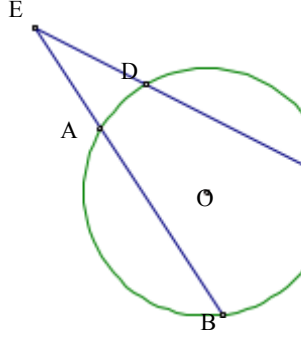
T
i
ế
p
x
ú
c
t
r
o
n
g

Hình 4

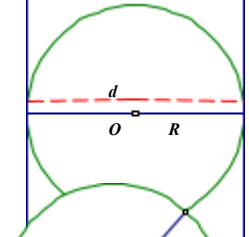
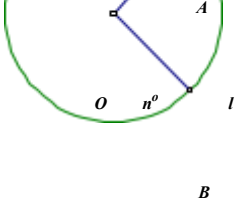
Liên quan đến đường tròn

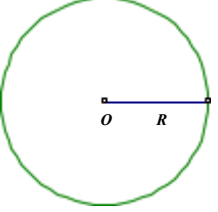
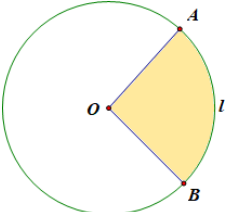
	Định nghĩa	Hình vẽ	Công thức tính số đo
Góc ở tâm	Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn		$sđ \overset{\frown}{AOB} = sđ \overset{\frown}{A} mB$

	được gọi là góc ở tâm		
Góc nội tiếp	Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai chứa hai dây cung của đường tròn đó		$\text{sđ } \overset{\frown}{B}AC = \frac{1}{2} \text{sđ } \overset{\frown}{B}C$

<p>Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung</p>			$sđ \overset{\frown}{B} Ax = \frac{1}{2} sđ \overset{\frown}{AB}$
<p>Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn</p>			$sđ \overset{\frown}{B} EC = \frac{sđ \overset{\frown}{n} C + sđ \overset{\frown}{A} m}{2}$
<p>Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn</p>			$sđ \overset{\frown}{B} EC = \frac{sđ \overset{\frown}{C} - sđ \overset{\frown}{AD}}{2}$

4. Công thức tính trong đường tròn

	Hình vẽ	Công thức tính
<p>Độ dài đường tròn</p>		$C = 2\pi R \text{ hay } C = \pi d$
<p>Độ dài cung tròn</p>		$l = \frac{\pi R n}{180}$

Diện tích hình tròn		$S = \pi R^2$
Diện tích hình quạt		$S_{quạt} = \frac{\pi R^2 n}{360}$ <p>hay</p> $S_{quạt} = \frac{lR^2}{2}$

5. Chứng minh một tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).
- Một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc σ thì nội tiếp đường tròn.
- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được) thì nội tiếp đường tròn. Điểm đó gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

50 BÀI TẬP CHỌN
LỌC.

Câu 1. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM , H là giao điểm của AK và MN .

1. Chứng minh tứ giác $BCHK$ nội tiếp.
2. Tính tích $AH \cdot AK$ theo R .
3. Xác định vị trí của điểm K để tổng $(KM + KN + KB)$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó?

Câu 2. Cho đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A . Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d , đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

1. Chứng minh $\vec{AB} = \vec{EH}$ và $\Delta ABH \sim \Delta EAH$.
2. Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn thẳng AC , đường thẳng CE cắt AB tại K . Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Câu 3. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K .

1. Chứng minh $\Delta KAF \sim \Delta KEA$.
2. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE , chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F .
3. Chứng minh $MN \parallel AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I) .
4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O) , với P là giao điểm của NF và AK ; Q là giao điểm của MF và BK .

Câu 4. Cho $(O; R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA . Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA = R^2$.

nhỏ BC của $(O; R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q . Chứng minh tam giác APQ có chu vi

không

đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC .

4. Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M, N . Chứng minh $PM + QN \geq MN$.

Câu 5. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E , tia AC cắt BE tại điểm F .

1. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $DA \cdot DE = DB \cdot DC$.
3. Chứng minh $\widehat{FD} = \widehat{CB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
4. Cho biết $DF = R$, chứng minh $\tan \widehat{FB} = 2$.

Câu 6. Cho đường tròn (O) , đường kính AB . d_1 và d_2 là hai tiếp tuyến của (O) tại hai điểm A và B . Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M, N .

đường tròn (O) tại hai điểm A và B . Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M, N .

1. Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{NI} = \widehat{BI}$ và $\widehat{IN} = 90^\circ$.
3. Chứng minh $AM \cdot BN = AI \cdot BI$.
4. Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O) . Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Câu 7. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Bán kính CO vuông góc với AB , M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C), BM cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu của H trên AB .

1. Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{CM} = \widehat{CK}$

3. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C .
4. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A . Cho P là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK .
- $AP \cdot MB = R \cdot MA$

Các bài tập hình học 9

đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O) . Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) . Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$ và A nằm giữa B và C).

1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4\text{cm}$, $AN = 6\text{cm}$.
3. Gọi I là trung điểm BC . Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Chứng minh: $MT \parallel AC$.
4. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K . Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 9. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $(O; R)$. (M khác A , M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P .

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
3. Gọi E là trung điểm của BQ . Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F . Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME \parallel NF$.
4. Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Câu 10. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A , C khác O). Đường thẳng đi qua C vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K . Gọi M là điểm bất kì nằm trên cung KB (M khác K , M khác B). Đường thẳng CK cắt đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D . Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là N .

1. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.
3. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH .
4. Khi M di động trên cung KB , chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 11. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC . Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C , I khác O). Đường thẳng IA cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi

H là trung điểm của đoạn thẳng DE .

1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

$$\frac{A}{AE} \square \frac{B}{D}$$

$$BE \cdot$$

- Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO , d cắt BC tại điểm K . Chứng minh: $HK \parallel DC$.
- Tia CD cắt AO tại điểm P , tia EO cắt BP tại điểm F . Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật

Câu 12. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC . Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I . Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K .

- Chứng minh bốn điểm C, N, K, I thuộc cùng một đường tròn..
- Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.
- Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
- Gọi P và Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK , tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ . Vẽ đường kính ND của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Câu 13. Cho đường tròn $(O; R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn $(O; R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB .

- Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO .
- Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo \widehat{CSD} .
- Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC , cắt đoạn thẳng CD tại điểm K . Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC .
- Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD . Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Câu 14. Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn.

M là một điểm trên đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại P, Q .

- Chứng minh rằng: Tứ giác $APMQ$ nội tiếp.
- Chứng minh rằng: $AP + BQ = PQ$.

3. Chứng minh rằng: $AP.BQ = AO^2$.

tứ giác $APQB$ nhỏ nhất.

Câu 15. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến

AM, AN với các đường tròn (O) ($M, N \in (O)$). Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC .

1. Chứng minh tứ giác $ANHM$ nội tiếp được trong đường tròn.

Chứng minh

2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$.

3. Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E .

$EH \parallel NC$.

Câu 16. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ 2

tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn $(O; R)$ (P, Q là 2 tiếp điểm). Lấy M thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho PM song song với AQ . Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM

với đường tròn $(O; R)$. Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K .

1. Chứng minh tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp và $KA^2 = KN.KP$

2. Kẻ đường kính QS của đường tròn $(O; R)$. Chứng minh NS là tia phân giác của \widehat{PNM} .

3. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK . Tính độ dài đoạn thẳng AG theo bán kính R .

Câu 17. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao

BE, CF cắt nhau tại H . Tia AO cắt đường tròn (O) tại D .

1. Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn;

2. Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;
3. Gọi M là trung điểm của BC , tia AM cắt đường tròn (O) tại G . Chứng minh G là trọng tâm của $\triangle ABC$.
4. Khi điểm M di động trên đường tròn (O) , tìm các vị trí của điểm M sao cho diện tích tam giác BAC đạt giá trị lớn nhất.

Đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy

điểm C sao cho $AC = R$. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA . Lấy điểm M bất kỳ

trên đường tròn (O) không trùng với A, B . Tia BM cắt đường thẳng d tại P . Tia CM cắt đường tròn (O)

tại điểm thứ hai là N , tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q .

1. Chứng minh tứ giác $ACPM$ là tứ giác nội tiếp;
2. Tính $BM \cdot BP$ theo R .
3. Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song;

khi M thay đổi trên $\square O \square$.

Câu 19. Cho ΔABC có ba góc nội tiếp đường tròn (O) , bán kính R . Hạ đường cao AH, BK

của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E .

1. Chứng minh tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
2. Chứng minh. $HK // DE$.
3. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Câu 20. Cho $\widehat{A} = 90^\circ$, vẽ đường tròn tâm A Đường tròn này cắt Ax, Ay thứ bán kính R .

tự tại B và D . Các tiếp tuyến với đường tròn (A) kẻ từ B và D cắt nhau tại C .

1. Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Chứng minh?
2. Trên BC lấy điểm M tùy ý (M khác B và C) kẻ tiếp tuyến MH với đường tròn (A) , (H là tiếp điểm). MH cắt CD tại N . Chứng minh rằng $\widehat{MAN} = 45^\circ$.
3. $P; Q$ thứ tự là giao điểm của $AM; AN$ với BD . Chứng minh rằng $MQ; NP$ là các đường cao của ΔAMN .

Câu 21. Cho ΔABC ($AB < AC$) có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường cao AH của ΔABC , đường kính AD của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường

vuông góc kẻ từ C và B xuống đường thẳng AD . M là trung điểm của BC .

1. Chứng minh các tứ giác $ABHF$ và $BMFO$ nội tiếp.
2. Chứng minh $HE // BD$.

$$3. \text{ Chứng minh } S^{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \quad (S_{ABC} \text{ là diện tích } \Delta ABC).$$

Câu 22. Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) ba đường cao AP, BM, CN của ΔABC cắt nhau tại H .

1. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp.
2. Chứng minh $\Delta ANM \sim \Delta ACB$.
3. Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh $BD = BE$.
4. Giả sử $AB = 4\text{cm}; AC = 5\text{cm}; BC = 6\text{cm}$. Tính MN .

Câu 23. Cho nửa đường tròn O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B). C là trung điểm của dây cung AM . Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B . Tia AM cắt d tại điểm N . Đường thẳng OC cắt d tại E .

1. Chứng minh: tứ giác $OCNB$ nội tiếp.

Các bài tập hình học

9

2. Chứng minh: $AC \cdot AN = AO \cdot AB$.
3. Chứng minh: NO vuông góc với AE .
4. Tìm vị trí điểm M sao cho $(2 \cdot AM + AN)$ ^{cắt} nhỏ nhất.

Câu 24. Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường thẳng (d) không đi qua O ,

Lấy điểm M bất kỳ trên tia đối BA , qua M kẻ hai tiếp đường tròn (O) tại 2 điểm A, B .

tuyến

MC, MD với đường tròn $(C, D$ là các tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.
2. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh HM là phân giác của \widehat{CHD} .
3. Đường thẳng đi qua O và vuông góc với MO cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q .

Tìm vị trí của điểm M trên (d) sao cho diện tích ΔMPQ nhỏ nhất.

Câu 25. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc AC ; E thuộc AB).

1. Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được trong một đường tròn;
2. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của AH và BC . Chứng minh MI vuông góc với ED .

Câu 26. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O , kẻ đường cao AH . Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC . Kẻ NE vuông góc với AH . Đường vuông góc với AC tại T tia AH cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D .

cắt đường tròn tại F .

1. Chứng minh $\overline{A^2BC} + \overline{A^2CB} = \overline{B^2IC}$ và tứ giác $DENC$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh hệ thức $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ và tứ giác $BFIC$ là hình thang cân.
3. Chứng minh: tứ giác $BMED$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Câu 27. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB .

thẳng OB (C khác O và B). Dụng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C ,

đường tròn (O) tại điểm M . Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F , tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E . Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

1: $AD \cdot AE = AC \cdot AB$.

1: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CDN$.

đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB .

B vuông góc với AD tại E và cắt AC tại F . Gọi H là hình chiếu của B trên AC và M là trung điểm của BC .

1. Chứng minh $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{MHC} + \widehat{BAD} = 90^\circ$.
3. Chứng minh $\frac{HC}{HF} + 1 = \frac{BC}{HE}$.

$$\frac{HC}{HF} + 1 = \frac{BC}{HE}$$

Câu 29. Cho ΔABC nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm M, N ($M \neq B, N \neq C$). Gọi H là giao điểm của BN và CM ; P là giao điểm của AH và BC .

1. Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh $BM \cdot BA = BP \cdot BC$.
3. Trong trường hợp đặc biệt khi ΔABC đều cạnh bằng $2a$. Tính chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ theo a .
4. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AE và AF của đường tròn tâm O đường kính BC (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Câu 30. Cho ΔABC đều có đường cao AH . Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không

trùng với B, C, H). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC .

1. Chứng minh tứ giác $APMQ$ nội tiếp được đường tròn và xác định tâm O của đường tròn này.
2. Chứng minh $OH \perp PQ$.
3. Chứng minh $MP + MQ = AH$.

Câu 31. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) có bán kính $R = 3$ cm.

Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại D .

1. Chứng minh tứ giác $OBDC$ nội tiếp đường tròn;

2. Gọi M là giao điểm của BC và OD . Biết $OD = 5$ (cm). Tính diện tích ΔBCD

3. Kẻ đường thẳng d đi qua D và song song với OC cắt đường kính AD . Đường thẳng d đi qua P và Q là tiếp tuyến với (O) tại

các đường thẳng AB, AC lần lượt

tại P, Q . Chứng minh $AB \cdot AP =$

$$AQ \cdot AC.$$

4. Chứng minh $P \sim AD = M \sim AC$.

Câu 32. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C cố định trên nửa đường tròn. Điểm M thuộc cung AC ($M \neq A; C$). Hạ $MH \perp AB$ tại H . Nối MB cắt CA tại E . Hạ

tại I . Gọi K là giao điểm của AC và MH . Chứng minh:

• $AK.AC \square AM^2$.

3. $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .
4. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

Câu 33. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng $d \perp OA$ tại A . Trên d lấy điểm M . Qua M kẻ 2 tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn (O) . Nối EF cắt OM tại H , cắt OA tại B .

1. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $OA.OB = OH.OM = R^2$.
3. Chứng minh tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MEF thuộc một đường tròn cố định khi M di chuyển trên d .
4. Tìm vị trí của M để diện tích ΔHBO lớn nhất.

Câu 34. Cho $(O; R)$ và điểm A thuộc đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm H sao cho $AH < R$. Dựng đường thẳng $d \perp Ax$ tại H . Đường thẳng d cắt đường tròn tại E và B (E nằm giữa H và B).

1. Chứng minh $\Delta ABH \sim \Delta EAH$.
2. Lấy điểm C thuộc Ax sao cho H là trung điểm AC . Nối CE cắt AB tại K . Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

Câu 35. Cho ΔABC vuông ở A . Trên cạnh AC dựng đường tròn tâm (O) có lấy 1 điểm M ,

đường kính MC . Đường thẳng BM cắt đường tròn tâm (O) tại D ,

đường tròn tâm (O) tại S

1. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và CA là tia phân giác của góc B .
2. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O) . Chứng minh các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.

BA, EM, CD đồng quy.

3. Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE .

OA .

Kẻ dây CD

Câu 36. Cho đường

tròn $(O; R)$, đường kính

AB . Điểm H thuộc đoạn

vuông góc với AB tại H . Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AH và đường tròn (O_2) đường

kính BH . Nối AC cắt

N . Nối BC cắt đường tròn (O_2) tại M . Đường

đường tròn (O_1) tại F .

MN cắt đường tròn $(O; R)$

tại E và F .

1. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật.

MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và

(O_2) .

4. Chứng minh $CE = CF = CH$.

Câu 37. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính vuông góc AB và CD . Gọi I là trung

điểm của
 K .

OB . Tia CI cắt đường tròn $(O; R)$ tại E . Nối AE cắt
 CD tại H ; nối BD cắt AE tại

1. Chứng minh tứ giác $OIED$ nội tiếp.

2. Chứng minh $AH \cdot AE = 2R^2$.

3. Tính

$\tan \widehat{BAE}$.

4. Chứng minh OK vuông góc với BD .

R , đường kính AD . Điểm H thuộc đoạn OD .

Câu 38. Cho đường tròn tâm O , bán kính

Kẻ dây $BC \perp AD$ tại H . Lấy điểm M thuộc

tại K . Đường thẳng

cung nhỏ AC , kẻ $CK \perp AM$

BM cắt CK tại N .

1. Chứng minh $AH \cdot AD = AB^2$.

2. Chứng minh tam giác CAN cân tại A .

3. Giả sử H là trung điểm của OD . Tính R theo thể tích hình nón có bán kính đáy là
 HD , đường cao BH .

4. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

Câu 39. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . Điểm A thuộc nửa đường tròn

($AC \leq AB$). Dựng về phía ngoài ΔABC một hình vuông $ACED$. Tia EA cắt nửa đường
tròn tại F . Nối BF cắt ED tại K .

1. Chứng minh rằng 4 điểm B, C, D, K thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $AB = EK$.

3. Cho

$\widehat{ABC} = 30^\circ; BC = 10$ cm. Tính diện tích hình viên

phần giới hạn bởi dây AC và

cung nhỏ AC .

4. Tìm vị trí điểm A để chu vi tam giác ΔABC lớn nhất.

Câu 40. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại A . Lấy M thuộc Ax , kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn tại B (B khác A). Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt AB tại D . Nối OM cắt AB tại I , cắt cung nhỏ AB tại E .

1. Chứng minh $OIDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh tích $AB \cdot AD$ không đổi khi M di chuyển trên Ax .

3. Tìm vị trí điểm M trên Ax để $AOBE$ là hình thoi.

ường tròn $(O; R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M

và N

là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC . Gọi E là

Nối MN cắt AC tại I . Hạ $ND \perp AC$.

trung điểm BC . Dựng hình bình hành $ADEF$.

1. Tính $\widehat{M}IC$.
2. Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.
3. Chứng minh rằng F thuộc đường tròn $(O; R)$.

4. Cho $\widehat{C}AB = 30^\circ; R = 30cm$.

Tính thể tích hình tạo thành khi cho ΔABC quay một vòng

quanh AB .

Câu 42. Cho đường tròn $(O; R)$ với dây AB cố định. Gọi I là điểm chính giữa cung lớn

AB . Điểm M thuộc cung $AH \perp IM; AH$
nhỏ IB . Hạ

cắt BM tại C .

1. Chứng minh ΔIAB và ΔMAC là tam giác cân.
2. Chứng minh C thuộc một đường tròn cố định khi M chuyển động trên cung nhỏ IB .
3. Tìm vị trí của M để chu vi ΔMAC lớn nhất.

Câu 43. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên

Ax lấy điểm K ($AK \geq R$). Qua K kẻ tiếp tuyến KM với đường tròn (O) . Đường thẳng $d \perp AB$ tại O , d cắt MB tại E .

1. Chứng minh $KAOM$ là tứ giác nội tiếp;
2. OK cắt AM tại I . Chứng minh $OI \cdot OK$ không đổi khi K chuyển động trên Ax ;
3. Chứng minh $KAOE$ là hình chữ nhật;

4. Gọi H là trực tâm của ΔKMA .
thuộc một đường tròn cố định.

Chứng minh rằng khi K chuyển động trên Ax thì H

Câu 44. Cho đường tròn (O) đường kính AB Gọi C là trung điểm của OA . Dây
 $= 2R$.

$MN \perp AB$ tại C . Trên cung MB nhỏ lấy điểm K . Nối AK cắt NM tại H .

1. Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tích $AH \cdot AK$ không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ MB .
3. Chứng minh ΔBMN là tam giác đều.
4. Tìm vị trí điểm K để tổng $KM + KN + KB$ lớn nhất.

Câu 45. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A ở ngoài đường tròn. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến

AB, AC tới đường tròn (B và C là 2 tiếp
điểm). I là một điểm thuộc đoạn BC ($IB < IC$).

Kẻ đường
thẳng $d \perp OI$ tại I . Đường thẳng d cắt AB, AC

lần lượt tại E và F .

- Chứng minh I là trung điểm EF .
- 3. K là một điểm trên cung nhỏ BC . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại K cắt $AB; AC$ tại M và N . Tính chu vi ΔAMN nếu $OA = 2R$.
- 4. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AC tại P và Q . Tìm vị trí của A để S_{APQ} nhỏ nhất.

Câu 46. Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt. Đường thẳng

OA cắt $(O); (O')$ Đường thẳng $O'A$ cắt $(O); (O')$ lần lượt
lần lượt tại điểm
thứ hai C, D .
tại điểm thứ hai
 E, F .

1. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I .
2. Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
3. Cho PQ là tiếp tuyến chung của (O) và (O') ($P \in (O), Q \in (O')$). Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ .

Câu 47. Cho hai đường $R > R'$ cắt nhau tại A và B . Kẻ tiếp
tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ với

tiếp tuyến chung DE của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$ sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A .

1. Chứng minh rằng $D \overset{\curvearrowright}{AB} = B \overset{\curvearrowright}{DE}$.
2. Tia AB cắt DE tại M . Chứng minh M là trung điểm của DE .
3. Đường thẳng EB cắt đường thẳng DB cắt AE tại Q . Chứng minh rằng PQ song song với AB .

Câu 48. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B . Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB ;

1. Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đoạn OM cắt đường tròn tại I . Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD .
3. Đường thẳng qua O , vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q . Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Câu 49. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp Ba đường cao đường tròn $(O; R)$.

$AD; BE; CF$ cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm BC , vẽ đường kính AK .

1. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

$60^\circ; S$

4. Cho BC cố định; A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn.

Chứng minh điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

Câu 50. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính vuông góc là AB và CD . Lấy K thuộc cung nhỏ AC , kẻ $KH \perp AB$ tại H . Nối AC cắt HK tại I , tia BC cắt HK tại E ; nối AE cắt đường tròn $(O; R)$ tại F .

1. Chứng minh $BHFE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $EC.EB = EF.EA$.
3. Cho H là trung điểm OA . Tính theo R diện tích ΔCEF .
4. Cho K di chuyển trên cung nhỏ AC . Chứng minh đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM , H là giao điểm của AK và MN .

4. Chứng minh tứ giác $BCHK$ nội tiếp.
5. Tính tích $AH \cdot AK$ theo R .
6. Xác định vị trí của điểm K để tổng $(KM + KN + KB)$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó?

Giải:

1. Chứng minh tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

$MN \perp AC$

$\angle AKB \square 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\angle HCB \square 90^\circ$

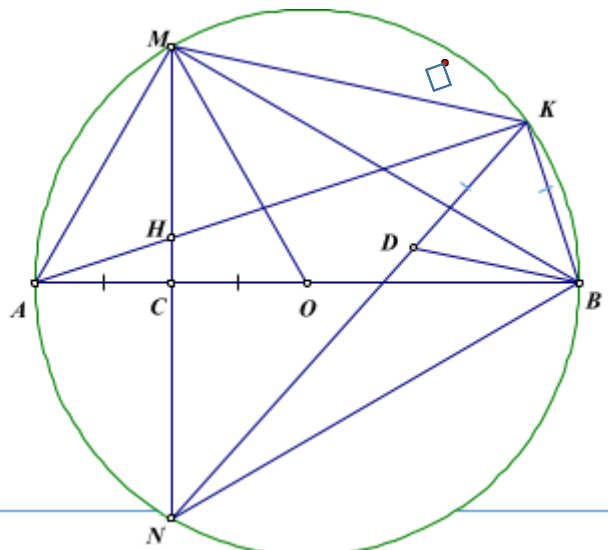
Xét tứ giác $BCHK$ có:

$\angle HCB \square \angle AKB \square 90^\circ \square 90^\circ \square 180^\circ$ mà 2 góc

ở vị trí đối nhau

\square Tứ giác $BCHK$ nội tiếp.

2. Tính $AH \cdot AK$ theo R .



Các bài tập hình học

9

Xét tam giác ΔACH và ΔAKB có:

ΔAKB (g.g)

$$\widehat{ACH} = \widehat{KB} = 90^\circ \parallel \Rightarrow \Delta ACH \#$$

\widehat{A} chung

}

||

$$\Rightarrow AC = AH \cdot AK \quad AB$$

$$1 \Rightarrow AH \cdot AK = AC \cdot AB$$

Mà $AC =$

$$R \text{ và } AB = 2R \Rightarrow AH \cdot AK = \frac{R^2}{2}$$

3. Xác định vị trí của K để $(KM + KN + KB)$ max

* Chứng minh

ΔBMN đều:

ΔAOM

cân tại M (MC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến)

Mà $OA = OM = R \Rightarrow \Delta AOM$ đều $\Rightarrow \widehat{MOA} = 60^\circ$

ΔMBN cân tại B vì $\widehat{MCB} = \widehat{CNB}$

|

$$\Rightarrow CM = CN$$

2

Mặt khác: $\widehat{MBA} = \widehat{MOA} = 30^\circ$ (góc nội

tiếp chắn cung

$$\widehat{M}A) \Rightarrow \widehat{M}BN = 60^\circ$$

$\triangle MBN$ cân tại B lại có $\widehat{M}BN = 60^\circ$ nên $\triangle MBN$ là tam giác đều

* Chứng minh $KM + KB = KN$

Trên cạnh NK lấy điểm D sao cho $KD = KB$.

$\Rightarrow \triangle KDB$ là tam giác cân mà $\widehat{N}KB = 1$ số $\widehat{N}B = 60^\circ$

2

$\Rightarrow \triangle KDB$ là tam giác đều $\Rightarrow KB = BD$.



$\widehat{K}MB$ (góc nội tiếp chắn cung \widehat{AB})

kề bù với $\widehat{K}BD$ trong $\triangle KDB$ đều)

góc nội tiếp chắn cung 240°)

$\Rightarrow \widehat{M}BK = \widehat{D}BN$ (tổng các góc trong tam giác

bằng 180°) Xét $\triangle BDN$ và $\triangle BKM$ có:

$$BK = BD \text{ (cmt) } \quad |$$

$$\widehat{B}DN = \widehat{B}KM \text{ (cmt) } \Rightarrow \triangle BDN = \triangle BKM \text{ (c.g.c)}$$

$$MB = MN \quad | \quad \square$$

$\Rightarrow ND = MK$ (2 cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow KM + KN + KB = 2KN$$

$\Rightarrow (KM + KN + KB)_{\max} = 4R$ khi KN là đường kính $\Rightarrow K, O, N$ thẳng hàng

iểm chính giữa cung BM thì $(KM \square KN \square KB)$ đạt giá trị max bằng

4R.

Câu 2. Cho đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A . Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d , đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

4. Chứng minh $\widehat{A}BE = \widehat{E}AH$ và $\triangle ABH \# \triangle EAH$.

5. Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn thẳng AC , đường thẳng CE cắt AB tại K . Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

6. Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Giải:

1. Chứng minh: $\widehat{A}BE = \widehat{E}AH$

$$\widehat{A}BE = 1 \text{ sđ}$$

$$\widehat{E}A \text{ (t/c góc nội tiếp)}$$

2

$$\widehat{H}AE = 1 \text{ sđ}$$

$$\text{sđ } \widehat{E}A \text{ (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây)}$$

2 c

$$\Rightarrow \widehat{A}BE = \widehat{H}AE \text{ (cung)}$$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle EAH$ có:

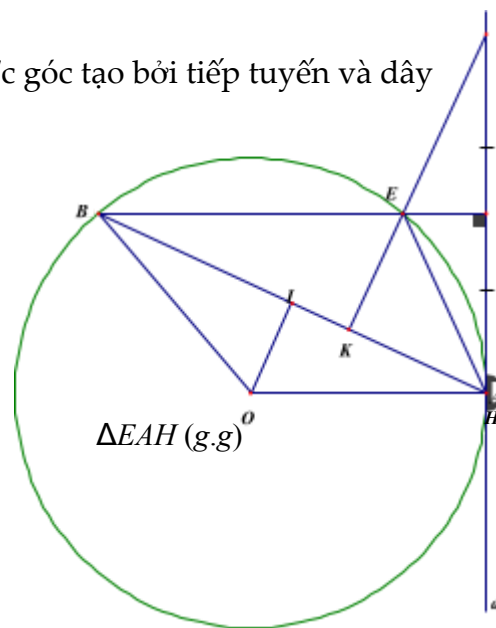
$$\widehat{AHB} = 90^\circ$$

$$\parallel \Rightarrow \triangle ABH \#$$

$$\widehat{A}BE = \widehat{H}AE \text{ (cmt)}$$

2. Xét $\triangle HEC = \triangle HEA$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{A}CE = \widehat{C}AE \text{ mà } \widehat{C}AE = \widehat{A}BE \text{ (cmt)}$$



$$\Rightarrow \widehat{A}CE = \widehat{A}BE$$

Mặt khác: $\widehat{A}BE + \widehat{C}AK = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{A}CE + \widehat{C}AK = 90^\circ$$

$\Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại K

Xét tứ giác $AHEK$ có: $\widehat{E}HK = \widehat{A}KE = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{E}HK + \widehat{A}KE = 180^\circ \text{ mà 2 góc ở vị trí đối nhau}$$

\Rightarrow Tứ giác $AHEK$ nội tiếp.

$\sqrt{\quad}$

3. Hạ $OI \perp AB \Rightarrow AI = IB = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$

g tại I có $\cos \widehat{OAI} = \frac{OI}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{OAI} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} = 60^\circ \quad \widehat{BAH} = \widehat{AH} = 1$$

$\triangle AHB$ vuông tại H có: $\widehat{BAH} = 60^\circ \Rightarrow \cos$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = \frac{2R}{2} = R$$

Vậy cần lấy điểm H sao cho độ dài $AH = R$ thì $AB = 2R$

Câu 3. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K .

5. Chứng minh $\triangle KAF \sim \triangle KEA$.
6. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE , chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F .
7. Chứng minh $MN \parallel AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I) .
8. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O) , với P là giao điểm của NF và AK ; Q là giao điểm của MF và BK .

Giải:

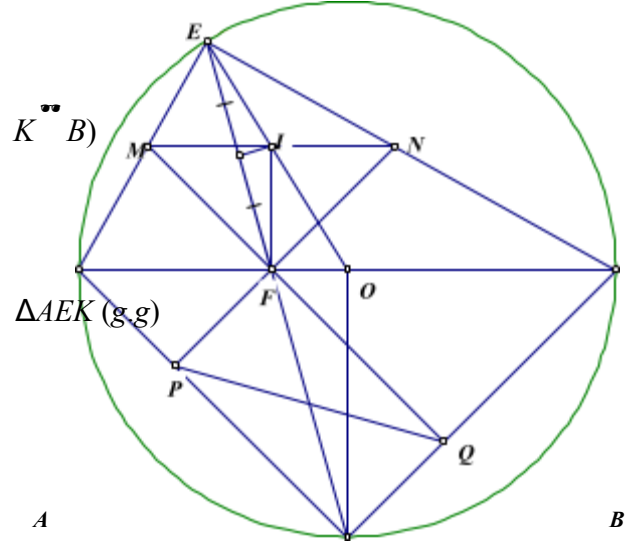
1. Chứng minh $\Delta KAF \# \Delta KEA$

$\widehat{KAB} = \widehat{KEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn Xét \widehat{KAB})

ΔKAF và ΔKEA có:

$\widehat{KAB} = \widehat{KEA}$ (cmt) $\Rightarrow \Delta KAF \#$

\widehat{KAB} chung $\left\{ \begin{array}{l} \square \end{array} \right.$



2. * Đường tròn $(I; IE)$ và đường tròn $(O; OE)$

I, O, E thẳng hàng $\Leftrightarrow IE + IO = OE$

$$\Rightarrow IO = OE - IE$$

Vậy $(I; IE)$ và $(O; OE)$ tiếp xúc trong tại E .

K

ác $(I; IE)$ tiếp xúc với AB tại F

g minh: $\triangle EIF$ cân tại I (I trung trực của

EF)

$$\triangle EOK \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{E}OI = \widehat{E}OK (= \widehat{O}EF)$$

mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IF \parallel OK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng \parallel)

$$\text{Có: } \widehat{A}EK = \widehat{K}EB \text{ (} \widehat{A}EK = \widehat{K}EB \text{)} \Rightarrow AK = KB$$

$\Rightarrow \triangle AKB$ cân tại K

$\Rightarrow OK \perp AB$

$$OK \perp AB$$

$$\text{Vì } \left. \begin{array}{l} OK \parallel IF \\ \end{array} \right\} \Rightarrow IF \perp AB$$

$\Rightarrow (I; IE)$ tiếp xúc với AB tại F .

3. $\widehat{A}EB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{M}EN = 90^\circ$ mà $\widehat{M}EN$ là góc nội tiếp đường tròn $(I; IE)$

$\Rightarrow MN$ là đường kính $(I; IE)$

$\Rightarrow \triangle EIN$ cân tại I

Lại có: $\triangle EOB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{I}NE = \widehat{O}BE$ mà 2 góc này vị trí đồng vị

$\Rightarrow MN \parallel AB$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng \parallel).

4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi $\triangle KPQ$ theo R khi E chuyển động trên (O)

$$\widehat{M}FE = \widehat{M}NE \quad (\text{góc nội tiếp } (I) \text{ cùng chắn cung } ME)$$

$$\widehat{A}KE = \widehat{A}BE \text{ (góc nội tiếp } (O) \text{ cùng chắn } AE)$$

cung

Mà $\widehat{MNE} = \widehat{ABE}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{AKE}$, hai góc này lại ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MQ \parallel AK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //)

Chứng minh tương tự: $NP \parallel BK$

Tứ giác $PFQK$ có: $MQ \parallel AK$

$NP \parallel BK$

$\widehat{PKQ} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

\Rightarrow Tứ giác $PFQK$ là hình chữ nhật

Ta có: $\widehat{MFA} = \widehat{QFB}$ (đối đỉnh) ở $\widehat{MFA} = \widehat{KAB} \Rightarrow \Delta FQB$ vuông
 $\widehat{KAB} = \widehat{KBA}$ (ΔAKB cân) mà cân tại Q .

Chu vi $\Delta KPQ = KP + PQ + KQ$

Mà $PK = FQ$ ($PFQK$ là hình chữ nhật) và $FQ = QB$ (ΔFQB cân tại Q)

Các bài tập hình học

9

$$\Rightarrow P_{KPQ} = QB + QK + FK = KB + FK$$

Mặt khác: ΔAKB cân tại $K \Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung AB

$FK \geq FO$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$$\Rightarrow KB + FK \geq KB + FO$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow KB + FK = KB + FO$

$$\Leftrightarrow FK = FO$$

$\Rightarrow E$ là điểm chính giữa cung AB

$$\Rightarrow FO = R$$

√

Áp dụng định lý Pi-ta-go trong ΔFOB tính được $BK = R \sqrt{2}$

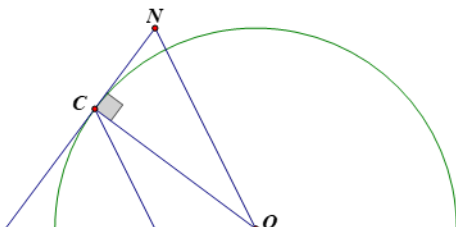
\Rightarrow Chu vi ΔKPQ nhỏ nhất $= R(\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1)$.

$$= R + R$$

\odot) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với \odot (B, C là các tiếp điểm).

- Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi E là giao điểm của BC và OA . Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE \cdot OA = R^2$.
- Trên cung nhỏ BC của $(O; R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của $(O; R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q . Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC .
- Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M, N . Chứng minh $PM + QN \geq MN$.

Giải:



1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp. Xét tứ giác $ABOC$ có:

$$\widehat{ABO} = 90^\circ \text{ (tính chất tiếp tuyến)}$$

$$\widehat{ACO} = 90^\circ \text{ (tính chất tiếp tuyến)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2. $AB = AC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } A.$$

Mà AO là tia phân giác \widehat{BAC} (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

Xét $\triangle ABU$ vuông ở B có BE là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông

$$\Rightarrow OB^2 = OE.OA, \text{ mà } OB = R \Rightarrow R^2 = OE.OA.$$

3. $PK = PB$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm). $KQ = QC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm). Xét chu vi $\triangle APQ = AP + AQ + QP$

$$= AP + AQ + PK + KQ$$

$$= AP + PK + AQ + QC$$

$$= AB + AC$$

$$= 2 AB$$

Mà (O) cố định, điểm A cố định nên AB không thay đổi.

$$4. \triangle OMP \sim \triangle QNO \Rightarrow \frac{MP}{OM} = \frac{QN}{ON} \Rightarrow MP.QN = ON.OM = \dots$$

$$\Rightarrow MN^2 = 4MP.QN$$

$$= 2 \left(\frac{MP}{ON} + \frac{QN}{OM} \right) \leq \dots$$

(Theo bất đẳng thức Cô-si)

Hay $MP + NQ \geq MN$ (đpcm).

minh IC là tiếp tuyến của đường tròn

Câu 6 Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E , tia AC cắt BE tại điểm F .

1. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội

5. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.

6. Chứng minh $\angle ACE = \angle AEB = 90^\circ$ và $DA.DE = DB.DC$.

(góc tròn) $\angle C = \angle E$

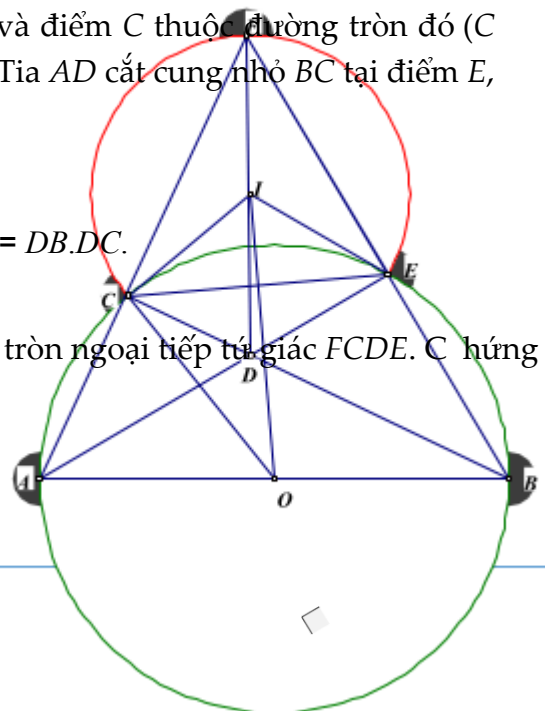
7. Chứng minh $\angle FDC = \angle OCB$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

$$\angle FCD + \angle FED = 180^\circ$$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau nên \square Tứ giác

$FCDE$ là tứ giác nội tiếp

2. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$



Các bài tập hình học

9

Xét ΔACD và ΔBED có:

$$\widehat{A}CD = \widehat{B}ED = 90^\circ \parallel$$

$\Delta BED(g.g)$

$$\widehat{A}DC = \widehat{B}DE \text{ (đ.đ)} \parallel \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Delta ACD \#$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow AD \cdot CD = ED \cdot BD \text{ (đpcm)}.$$

$CD \quad ED$

3. * Chứng minh $\widehat{C}FD = \widehat{O}CB$

Vì tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp (I) nên

$$\widehat{C}FD = \widehat{C}EA \text{ (góc nội tiếp } (I) \text{ cùng chắn cung } CD)$$

Mà $\widehat{C}ED = \widehat{C}BA$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung CA)

$$\Rightarrow \widehat{C}FD = \widehat{C}BA$$

Lại có ΔOCB cân tại O nên $\widehat{C}BA = \widehat{O}CB$

$$\Rightarrow \widehat{C}FD = \widehat{O}CB \quad (1)$$

$$\Delta ICF \quad \text{cân tại } I: \widehat{C}FD = \widehat{I}CF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{I}CF = \widehat{O}CB$

* Chứng minh

IC là tiếp tuyến (O):

$$\text{Ta có: } \widehat{I}CF + \widehat{I}CB = 90^\circ$$

(vì $\widehat{D}IC$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \widehat{O}CB + \widehat{B}CI = 90^\circ$$

$\Rightarrow OC \perp CI \Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của (O) .

4. Ta có 2 tam giác vuông $\triangle ICO \# \triangle FEA$ (g.g)

$$\widehat{CAE} = \widehat{COE} = \widehat{COI} \quad (\text{góc nội tiếp chắn } \widehat{CE}) \Rightarrow \widehat{CIO} = \widehat{AFB}$$

2

$$\text{Mà } \tan \widehat{CIO} = \frac{CO}{CI} = \frac{R}{2} = 2$$

$$\frac{CO}{CI} = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{AFB} = \tan \widehat{CIO} = 2.$$

Câu 6. Cho đường tròn (O) , đường kính AB và d_1 và d_2 là hai tiếp tuyến của (O) tại A và B . Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với OE cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M, N .

đường tròn (O) tại hai điểm A và B . Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với OE cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M, N .

1 $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

1 $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN} = 90^\circ$.

- Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O) . Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Giải:

1. Chứng minh $AMEI$ nội tiếp. Xét tứ giác $AMEI$ có:

$$\widehat{MAI} + \widehat{MEI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \text{ mà 2 góc này ở vị trí đối}$$

nhau

⇒ Tứ giác $AMEI$ nội tiếp.

2. * Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$.

Xét tứ giác $ENBI$ có:

$$\widehat{ENI} + \widehat{EBI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \text{ mà 2 góc này ở vị trí đối}$$

nhau

⇒ Tứ giác $ENBI$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ENI} = \widehat{EBI} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung } \widehat{EI} \text{)}$$

* Chứng minh $\widehat{MIN} = 90^\circ$

Tứ giác $ENBI$ nội tiếp nên $\widehat{EMI} = \widehat{EAI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EI)

$$\text{Lại có: } \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAI} + \widehat{EBI} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EMI} + \widehat{ENI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIN} = 90^\circ.$$

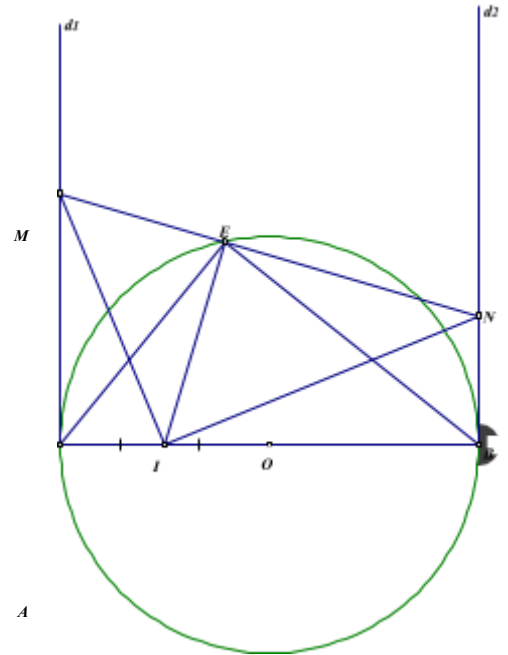
ΔMNI vuông tại I . Vậy

3. Chứng minh $AM \cdot BN = AI \cdot BI$

Xét ΔAMI và ΔBNI có: $\widehat{MAI} = \widehat{NBI} = 90^\circ$

$$\widehat{AIM} = \widehat{BIN} \quad (\text{cùng phụ với góc } \widehat{BIN})$$

$$\Rightarrow \Delta AMI \sim \Delta BIN \text{ (g.g)}$$



$$\Rightarrow AM = BI$$

$$\Rightarrow AM \cdot BN = AI \cdot BI.$$

$$AI = BN$$

4. Ta có hình vẽ

Khi E, I, F thẳng hàng $\widehat{EF} = 1$ số $\widehat{AF} = 45^\circ$

2

$\widehat{MI} = \widehat{EI} = 45^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AI)

$\Rightarrow \triangle MAI$

vuông cân tại A .
 \sqrt{R}

\Rightarrow

$$AM = AI = \frac{\sqrt{R}}{2} \Rightarrow MI = \frac{\sqrt{R}}{2} = \frac{\sqrt{R}}{2}$$

(Định lí Pi-ta-go).

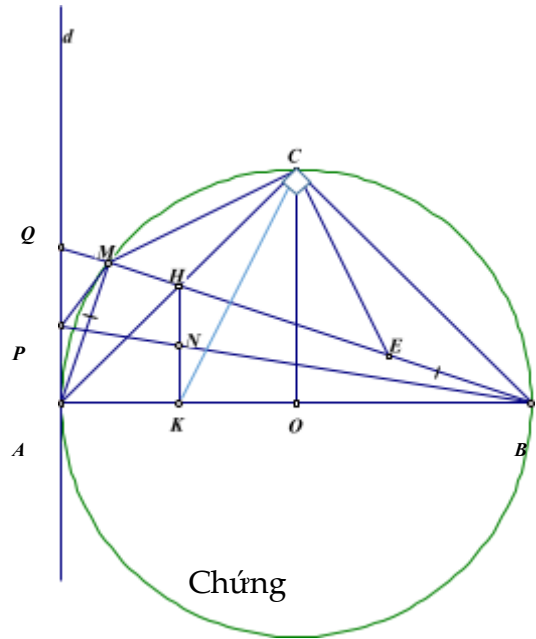
$$\sqrt{\frac{BI}{BN} \cdot \frac{3R}{IN}} = \frac{9R^2}{16} = \frac{3R}{2}$$

$$\sqrt{1 \cdot \frac{4}{1R \cdot 2 \cdot 3R}} = 2 \cdot 3R^2$$

$$S_{MIN} = 2 \cdot MI \cdot NI = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \quad (\text{đơn vị diện tích}).$$

Câu 7. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Bán kính CO vuông góc với AB , M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C), BM cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu của H trên AB .

5. Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh $\widehat{A}''CM = \widehat{A}''CK$
7. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C .
8. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A . Cho P là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $AP \cdot MB = R \cdot MA$



minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK .

Giải:

1. Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp: Xét tứ giác $CBKH$ ta có:

$$\widehat{B}''KH = 90^\circ$$

$$\widehat{H}''CB = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BKH} + \widehat{HCB} = 180^\circ$$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

\Rightarrow Tứ giác $CBKH$ nội tiếp.

2. Chứng minh

$$\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$$

Tứ giác $CBKH$ nội tiếp nên: $\widehat{HCK} = \widehat{HBK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HK)

nội tiếp (O) nên: $\widehat{M}CA = \widehat{H}KB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn

$$\widehat{H}CK = \widehat{M}CA$$

$$\Rightarrow \widehat{A}CM = \widehat{A}CK \text{ (Đpcm).}$$

3. Chứng minh $\triangle ECM$ vuông cân tại C.

Vì $CD \perp AB$ nên CO là đường trung trực của $AB \Rightarrow CA = CB$

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle BEC$ có:

$$\widehat{M}AC = \widehat{M}BC \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } MC)$$

cung

$$MA = BE \text{ (gt)}$$

$$CA = CB \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle BEC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{M}CA = \widehat{E}CB$ (2 góc tương ứng) và $CM = CE$ (2 cạnh tương ứng)

$$\text{Mặt khác: } \widehat{E}CB + \widehat{E}AC = \widehat{B}CA = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{M}CA + \widehat{E}CA = 90^\circ$$

Xét $\triangle EMC$

có:

$$\widehat{M}CE = 90^\circ \quad |$$

$$CM = CE$$

$\} \Rightarrow \triangle ECM$ vuông cân tại C (Đpcm).

||

4. Chứng minh PB đi qua trung điểm của HK

Theo đề bài: $AP.MB = R \Leftrightarrow AP = R = BO$

$MA \quad AM \quad MB \quad BM$

Mà $\widehat{PAM} = \widehat{sđAM}$ (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

2

$\widehat{MBA} = \widehat{sđAM}$ (t/c góc nội tiếp chắn cung AM)

$\Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{MBA} \Rightarrow \Delta PAM \# \Delta OMB$ (c.g.c) (Hệ quả)

$\Rightarrow PA = OB = 1 \Rightarrow PA = PM$

$PM = OM$ (1)

Vậy cần lấy điểm $P \in d$ sao cho $PA = PM$

Gọi N là giao điểm của PB và HK , Q là giao điểm của BM với d

Xét ΔQMA vuông tại M có: $PA = PM \Rightarrow \Delta PMA$ cân tại $P \Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{PMA}$

$$\widehat{PMA} + \widehat{MQ} = 90^\circ$$

$$\widehat{PAM} + \widehat{QM} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{PMA} = \widehat{QM} \Rightarrow \Delta PMQ$ cân tại $P \Rightarrow$ (2)

$$PM = PQ$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow PM = PA = PQ$.

$$\frac{PA}{BN} = \frac{BP}{NH} \quad (\text{Định lí Ta-let trong } \Delta PBQ)$$

$$\frac{BP}{PA} = \frac{PQ}{NH} \quad \text{mà } PA = PQ(\text{cmt}) \quad \Rightarrow NK = NH$$

$$\Rightarrow NK = NH$$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của HK .

Vậy với $P \in d$ mà $AP \cdot MB = R$ thì PB đi qua trung

điểm của HK .

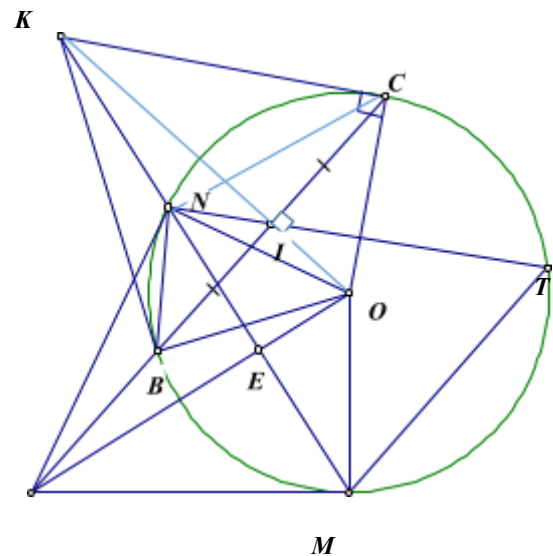
MA

Câu 8. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O) . Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) . Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC, d$ không đi qua tâm O)

5. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.
6. Chứng minh $AN^2 = AB \cdot AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4\text{cm}, AN = 6\text{cm}$.
7. Gọi I là trung điểm BC . Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Chứng minh: $MT \parallel AC$.
8. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K . Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d

thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Giải:



1. Chứng minh tứ giác AMON nội tiếp.

Ta có $AM \perp OM$ (AM là tiếp tuyến của (O))

Website: webtoan.com
Các bài tập hình học 9
Vì $AQ \parallel HK$ (cùng vuông góc AB)
nên $\widehat{MA} = 90^\circ$
 $\widehat{NK} = \widehat{BN}$ (Định lý Ta-let trong $\square ABP$)

à tiếp tuyến của (O)

$\sphericalangle N$ có:

$$\widehat{MA} + \widehat{NA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Các bài tập hình học

9

⇒ tứ giác AMON là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4\text{cm}$; $AN = 6\text{cm}$.

Xét (O): $\widehat{A}NB = \widehat{B}CN$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BN).

Xét $\triangle ANB$ và $\triangle ACN$:

$\widehat{C}AN$ chung

$$\widehat{A}NB = \widehat{B}CN \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle ACN \text{ (g.g)}$$

(tính chất hai tam giác đồng dạng).

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AN}$$

$$AC \cdot AN$$

$$\Rightarrow AN^2 = AB.AC \text{ (Đpcm).}$$

* Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4\text{cm}$; $AN = 6\text{cm}$.

$$4.AC = 6^2 \Leftrightarrow AC = 9 \text{ (cm) mà}$$

Ta có $AN^2 = AB.AC$ (cmt) mà $AB = 4\text{cm}$, $AN = 6\text{cm}$ nên:

$$AB + BC = AC \text{ nên } BC = 5 \text{ cm.}$$

3. Chứng minh $MT \parallel AC$.

Xét (O): I là trung điểm của dây BC

$$\Rightarrow OI \perp BC$$

(quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

Tứ giác OIAN nội tiếp vì $\widehat{A}NO = \widehat{A}IO = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{A}IN = \widehat{A}ON$$

(hai góc nội tiếp cùng chắn

$\widehat{A}N$) mà hai góc cùng nhìn cạnh AO (1)

AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A.

$\Rightarrow OA$ là phân giác $\widehat{M'ON}$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\Rightarrow \widehat{A'ON} = \widehat{M'ON}$$

Mà $\widehat{M'TN} = \widehat{M'ON}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN).

$$\Rightarrow \widehat{M'TN} = \widehat{A'ON} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{M'TN} = \widehat{A'IN}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MT \parallel AC$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song).

4. Hai tiếp tuyến (O) tại B và C cắt nhau ở K . Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi thỏa mãn điều kiện đề bài.

* MN cắt OA tại E .

Ta chứng minh được

$$MN \perp OA \Rightarrow EM \perp OA$$

được $OI \cdot OK = OE \cdot OA (= OB^2 = OM^2 = R^2)$

Các bài tập hình học

9

Từ đó chứng minh được $\Delta OEK \#$

ΔOIA (c.g.c)

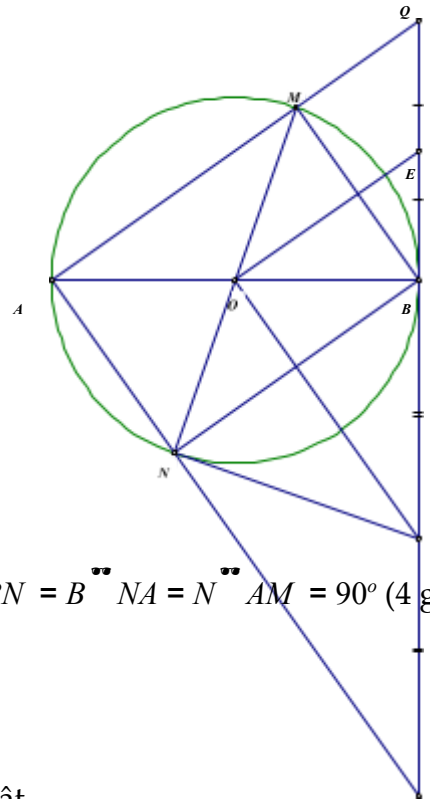
$$\Rightarrow \widehat{O}EK = \widehat{O}IA = 90^\circ$$

$\Rightarrow EK \perp OA$ mà $EM \perp OA \Rightarrow EM$ trùng EK .

K thuộc MN cố định (đpcm).

Câu 9. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $(O; R)$. (M khác A , M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P .

5. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.
6. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
7. Gọi E là trung điểm của BQ . Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F . Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME \parallel NF$
8. Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.



Giải:

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

Ta có

$$\widehat{AMB} = \widehat{M}BN = \widehat{B}NA = \widehat{N}AM = 90^\circ \text{ (4 góc nội tiếp chắn)}$$

nửa đường tròn)

$$\Rightarrow AMBN$$


F

là hình chữ nhật.

2. Ta có

$$\widehat{A}NM = \widehat{A}BM \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung}$$

AM)



$\sphericalangle B$ (2 góc cùng phụ với góc $\widehat{Q}BM$)

$\widehat{Q}B$

$\widehat{NP} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MQB} + \widehat{MNP} = 180^\circ$; hai góc này lại ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow MNPQ$ là tứ giác nội tiếp.

3. * Chứng minh F là trung điểm của BP .

E là trung điểm của BQ , O là trung điểm của AB

$\Rightarrow OE$ là đường trung bình của $\triangle ABQ$

$\Rightarrow OE \parallel AQ$ (tính chất đường trung bình của tam giác)

Mà $OE \perp OF$; $AQ \perp AP$

Các bài tập hình học

9

$$\Rightarrow OF // AP$$

Lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow OF$ là

đường trung bình của ΔABP .

(đường

$\Rightarrow F$ là trung điểm của BP .

* Chứng minh $ME // NF$

ΔNPB vuông tại N , có F là trung điểm của

$$\text{cạnh } BP \Rightarrow NF = BF = FB = \frac{1}{2} BP$$

2

trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền)

Xét ΔONF và ΔOBF có:

$$ON = OB = R$$

OF chung

$$\left. \begin{array}{l} | \\ | \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ONF = \Delta OBF \text{ (c.c.c)} \quad \square$$

$$FN = FB \text{ (cmt)} \quad | \quad \square$$

$$\Rightarrow \widehat{ONF} = \widehat{OBF} = 90^\circ \text{ (2 góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow ON \perp NF$$

Chứng minh tương tự ta có $OM \perp ME$

$$\Rightarrow ME // NF$$

(cùng vuông góc với MN).

$$4. \quad 2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R \cdot PQ - AM \cdot AN$$

ΔABP #

Δ

$\frac{O}{B}$

A
 \Rightarrow
 A
 B
 $=$
 B
 P
 \Rightarrow
 A

B
 $=$
 B
 P
 O
 B
 O
 B
 B
 A

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

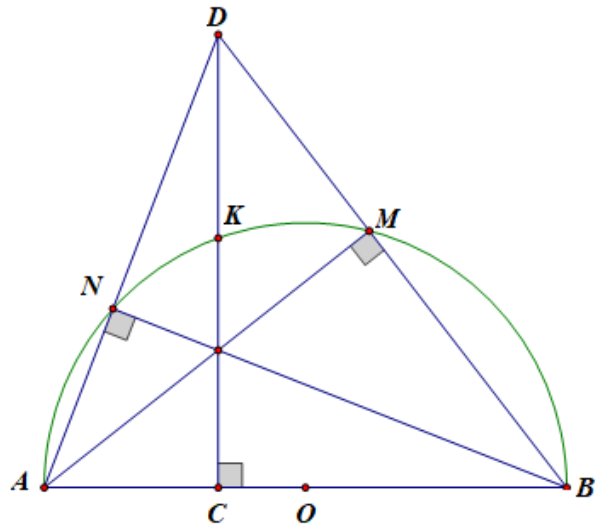
$+$ \geq $=$ $=$

$\frac{AM^2 + AN^2}{2} \geq \frac{MN^2}{2}$

$$\begin{aligned}
 AM^2 + AN^2 &\geq MN^2 \\
 2R^2 &= 2R^2 \\
 R \cdot 4R - 2R^2 &= 6R^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \geq 3R^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $AM = AN$ và $PQ = BP$. Hay Δ Vậ để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất thì đ kính AB .



Câu 10. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A , C khác O). Đường thẳng đi qua C vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K . Gọi M là điểm bất kì nằm trên cung KB (M khác K , M khác B). Đường thẳng CK cắt đường thẳng AM , BM lần lượt tại H và D .

5. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.
7. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH .
8. Khi M di động trên cung KB , chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

1. Chứng minh tứ giác nội tiếp Chứng minh được $\widehat{AMD} = 90^\circ$

Vì $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90^\circ$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh AD (nên M, C thuộc đường tròn đường kính AD).

Vậy tứ giác $ACMD$ nội tiếp.

2. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$

Xét $\triangle CAH$ và $\triangle CDB$ có:

$$\widehat{ACH} = \widehat{DCB} = 90^\circ$$

Mặt khác $\widehat{CAH} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ v góc \widehat{CBM})

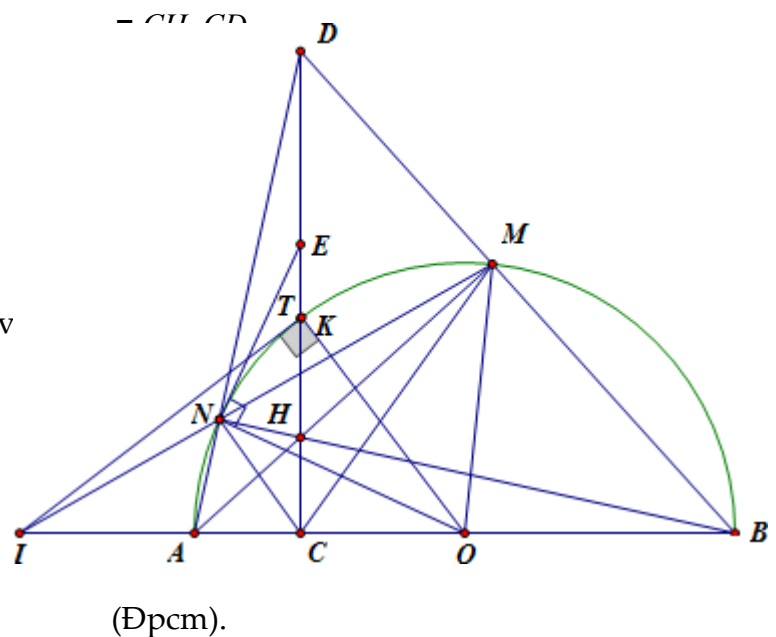
Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow \triangle CAH \sim \triangle CDB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow CA.CB = CH.CD$$

3.

* Chứng minh A, N, D thẳng hàng Vì AM và DC là đường cao



(Đpcm).

của tam giác ABD nên H là trực

tâm ΔABD **Các bài tập hình**

Website:

học 9

webtoan.com

$$\Rightarrow AD \perp BH; AN \perp BH$$


Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là N .

Nên A, N, D thẳng hàng

* Gọi E là giao điểm của CK và tiếp tuyến

tại N . Ta có: $BN \perp DN, ON \perp EN$

$$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{BNO} \text{ mà } \widehat{BNO} = \widehat{OBN}, \widehat{OBN} = \widehat{EDN}$$


$$DN \Rightarrow \Delta DEN \text{ cân tại } E \Rightarrow ED \quad (3)$$

$$90^\circ - \widehat{END} = 90^\circ - \widehat{NDH}$$

$$= \widehat{EHN}$$

(Đpcm).

4. Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi I là giao điểm của MN và AB , kẻ IT là tiếp tuyến của nửa đường tròn với T là tiếp

điểm $\Rightarrow IN \cdot IM = IT^2$ (5)

Mặt khác: $EM \perp OM$ (vì $\triangle ENO = \triangle EMO$ và (6)

$EN \perp ON$)

$\Rightarrow N, C, O, M$ cùng thuộc 1 đường tròn \Rightarrow

$IN \cdot IM = IO \cdot IC$

Từ (5) và (6) $\Rightarrow IC \cdot IO = IT^2$

$\Rightarrow \triangle ICT \sim \triangle ITO \Rightarrow CT \perp IO \Rightarrow T \equiv K$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của tiếp tuyến tại K của nửa đường tròn và đường thẳng AB

$\Rightarrow I$ cố định (Đpcm).

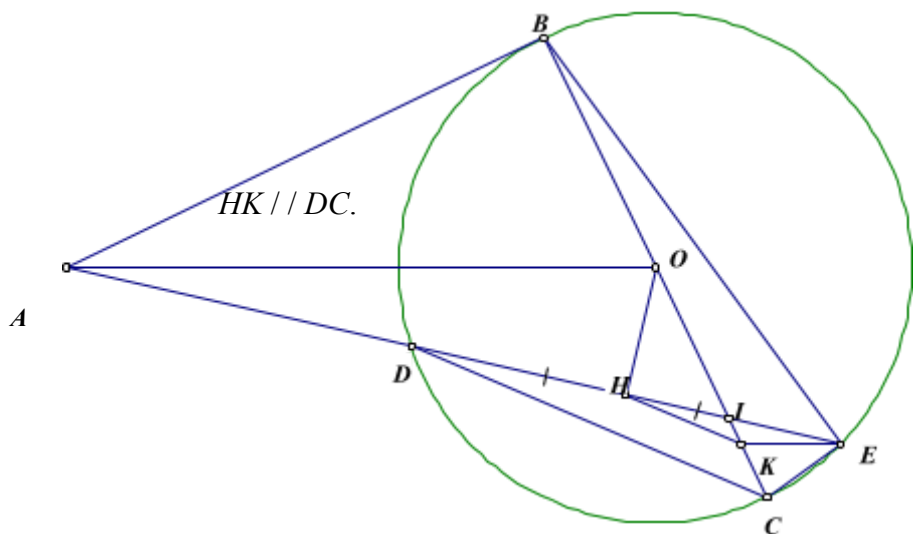
Câu 11. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC . Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng IA cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE .

5. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

6. Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.

7. Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO , d cắt BC tại điểm K . Chứng minh:

8. Tia CD cắt AO tại điểm P , tia EO cắt BP tại điểm



F. Chứng minh tứ giác

$BECF$ là hình chữ nhật

Giải:

1. Chứng minh bốn điểm A ,
 B , O , H cùng nằm trên
một đường tròn.

Chứng minh được $\widehat{ABO} = 90^\circ$

Chứng minh được $\widehat{AHO} = 90^\circ$

\Rightarrow Tứ giác $ABOH$ nội tiếp

$$\overline{AE} \quad \overline{BE}$$

Chứng minh được $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có:

\widehat{EAB} chung

Chứng minh được $\triangle ABD \cong$

$\triangle AEB$ (g.g)

$\Rightarrow AB = BE$ (Đpcm).

$$AE = BE$$

3. Chứng minh $KH \parallel DC$

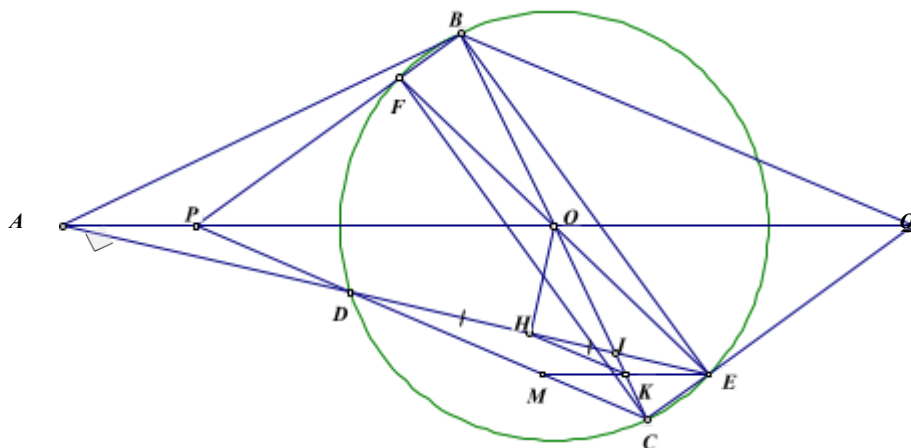
Tứ giác $ABOH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OBH} = \widehat{OAH}$ mà $\widehat{OAH} = \widehat{HEK}$ (do $EK \parallel AO$)

$\Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{HEK}$.

Suy ra tứ giác $BHKE$ nội tiếp

Chứng minh được Kết luận $\widehat{BKH} = \widehat{BCD}$ (cùng bằng \widehat{BEH})
 luận $HK \parallel DC$.

4. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.



Gọi giao điểm tia CE và tia AO là Q , tia EK và CD cắt nhau tại điểm M

Xét $\triangle EDM$ có $HK \parallel DM$ và H là trung điểm của đoạn DE , suy ra K là trung điểm của đoạn thẳng ME .

$$\underline{KE} = \underline{MK}$$

Có $ME \parallel PQ$

$OQ = OP$

CK

Các bài tập hình

(cùng bằng CO), suy ra O là trung điểm của đoạn PQ

học 9

webtoan.com

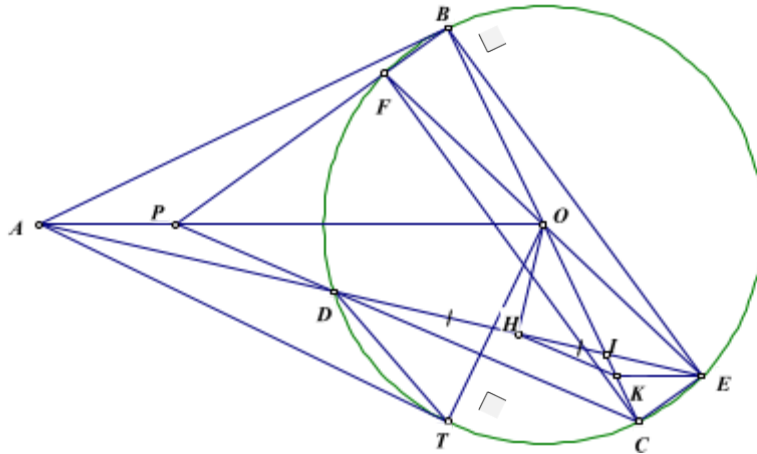
Có: $OP = OQ; OB = OC$. Suy ra tứ giác $BPCQ$ là hình bình hành. Suy ra $CE \parallel BF$.

2. Chứng minh

Chứng minh được $\triangle COE = \triangle BOF$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OF$

$\Rightarrow OE \Rightarrow OB = OC = OE = OF$

Suy ra tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.



Kẻ tiếp tuyến AT với (O) , chứng minh $APDT$ nội tiếp ($\widehat{P}AT + \widehat{P}DT = 180^\circ$)

dẫn đến $\widehat{A}TP = \widehat{C}BE$ (1), chứng minh $\Delta TAP =$ (2)

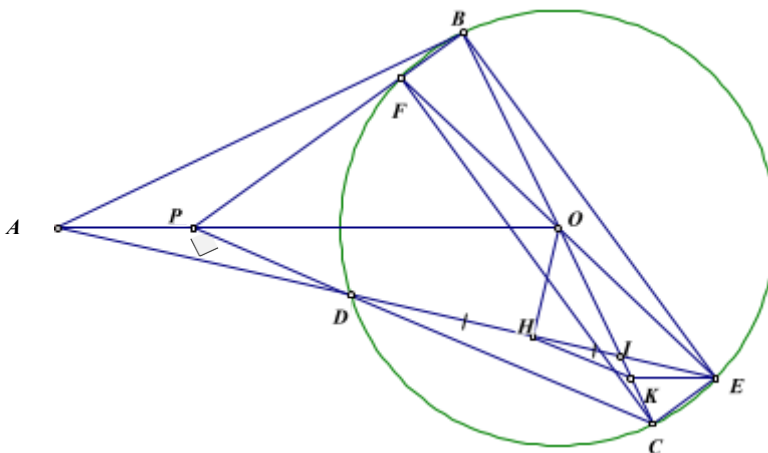
$$\begin{aligned} \Delta BAP \text{ (g.c.g)} &\Rightarrow \widehat{A}TP \\ &= \widehat{A}BP \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{A}BP = \widehat{E}BC$

Dẫn đến

$\widehat{E}BF = 90^\circ \Rightarrow EF$ là đường kính $\Rightarrow BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

Cách 3:



Chứng minh $\Delta EHB \#$

$$\Delta COP \text{ (g.g)} \Rightarrow EB = EH = ED$$

$$\Rightarrow \Delta EDB \# \Delta CBP$$

$CP \quad CO \quad CB$

$$\Rightarrow \vec{ED} = \vec{CB}$$

$\angle EDB + \angle CDE = 90^\circ, \angle CDE = \angle ECB \Rightarrow \angle EBP = 90^\circ \Rightarrow BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

Câu 12. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC . Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I . Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K .

• Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.

7. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

8. Gọi P và Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK , tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ . Vẽ đường kính ND của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Giải:

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I thuộc cùng một đường tròn.

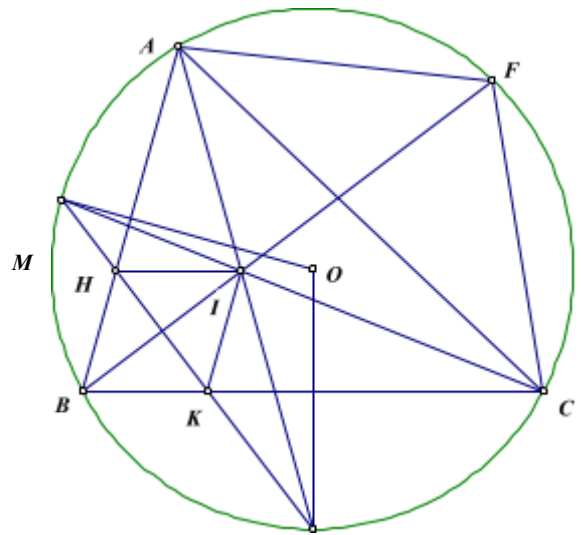
Ta có: $\widehat{M}CB = \widehat{A}NM$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

$$\Rightarrow \widehat{I}CK = \widehat{I}NK$$

Mà hai góc này ở cùng nhìn cạnh IK trong tứ giác $IKNC$ từ hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow IKNC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow C, N, K, I$ thuộc cùng một đường tròn.



2. Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.

$\widehat{B}MN = \widehat{N}BC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).

Xét $\triangle NBK$ và $\triangle NMB$ có:

$$\widehat{B}NB = \widehat{M}NB \Rightarrow NB^2 = NK \cdot NM \text{ (đpcm).}$$

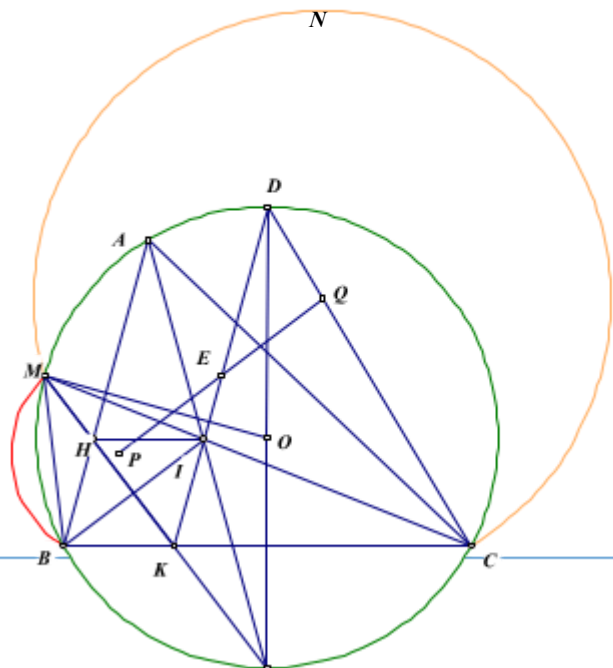
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi. Nối BI cắt đường tròn

$$\widehat{B}MN = \widehat{N}BC \text{ (cmt)}$$

Ta có $\triangle NBK \sim \triangle NMB$ (g.g)
Ta có $\widehat{B}MI = \widehat{H}MI$ (vì cùng nhìn cung $BN = NC$)

$$\widehat{M}B' = \frac{1}{2} \widehat{M}A = \widehat{M}A' = \widehat{M}F \text{ (góc}$$

\widehat{M}
nội tiếp chắn



trong đường tròn)

$$\text{Mà } \widehat{M} \widehat{A} = \widehat{M} \widehat{C}; \widehat{A} \widehat{F} = \widehat{C} \widehat{F} \text{ nên } \widehat{M} \widehat{BI} = \widehat{M} \widehat{IB}$$

$\Rightarrow \Delta BMI$ cân tại M có MN là phân giác

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của BI .

$$\Rightarrow HK \perp BI, BH = HI, BK = KI \quad (1)$$

Mặt khác $\widehat{H} \widehat{BF} = \widehat{F} \widehat{BC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung $AF = FC$)

$\Rightarrow \Delta BHK$ có BF là phân giác cũng là đường cao

$\Rightarrow \Delta BHK$ cân tại $B \Rightarrow BH = BK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $BHIK$ là hình thoi.

4. Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng

$$\widehat{Q} \widehat{CK} = 90^\circ - \widehat{C} \widehat{MK}$$

$$\Rightarrow \widehat{Q} \widehat{CK} = 90^\circ - \widehat{C} \widehat{BN}$$

$$\Rightarrow \widehat{Q} \widehat{CK} = 90^\circ - \widehat{B} \widehat{CN}$$

$\Rightarrow CQ \perp CN$ nên C, D, Q thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có D, B, P thẳng hàng.

$$\text{Lại có } \widehat{C} \widehat{KQ} = 90^\circ - \widehat{C} \widehat{MK}$$

$$\Rightarrow \widehat{K} \widehat{BP} = 90^\circ - \widehat{B} \widehat{MK}$$

$$\text{Mà } \widehat{C} \widehat{MK} = \widehat{B} \widehat{MK} \text{ nên } \widehat{C} \widehat{KQ} = \widehat{K} \widehat{BP}$$

Hay $KQ \parallel DP$.

Tương tự $KP \parallel DQ$

Nên $KPDQ$ là hình bình hành. Hình bình hành $KPDQ$ có hai đường chéo KD và PQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Nên D, E, K thẳng hàng (Đpcm).

Câu 13. Cho đường tròn $(O; R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn $(O; R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB .

5. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO .
6. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo \widehat{CSD} .

ng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC , cắt đoạn thẳng CD tại điểm K . Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC .

8. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD . Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải:

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO . SD, SC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$

$$\Rightarrow OD \perp SD, OC \perp SC$$

$$\Rightarrow D, C \text{ thuộc đường tròn đường kính } SO \quad (1)$$

Mặt khác H là trung điểm của AB

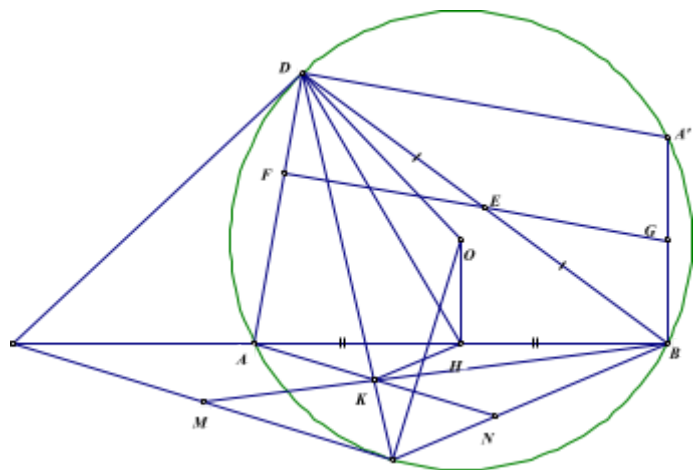
$$\Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow \widehat{HSO} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow H \text{ thuộc đường tròn}$$

đường kính SO (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C, D, H, O, S$ cùng thuộc đường tròn đường kính SO .

2. Tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và số đo góc \widehat{CSD} .



có:

Xét $\triangle SDO$

$$SO^2 = SD^2 + DO^2$$

$$\Rightarrow SD^2 = SO^2 - DO^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

$$\Rightarrow SD = R\sqrt{3}$$

Ta có: $\sin \widehat{DSO} = \frac{DO}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DSO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CSD} = 60^\circ$.

$$SO = 2R$$

3. Vì S, D, O, H cùng thuộc một đường tròn nên $SHOD$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{SOD} = \widehat{COD} \quad (\text{góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{SD}) \quad (3)$$

Lại có: $\widehat{AKD} = \widehat{SCD}$ (đồng vị) nên $\widehat{AKD} = \widehat{SCD} = \widehat{COD} \quad (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AKD} \Rightarrow ADHK$ nội tiếp.
 Gọi M là giao điểm của BK và SC .
 Gọi N là giao điểm của AK và BC .

Ta có: $\widehat{KHA} = \widehat{BSA}$ vì $\widehat{KHA} = \widehat{DKA}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn \widehat{AK})

$A \square DK \square C \square BS$ (2 góc nội tiếp cùng

chấn $A \square C$)

$\Rightarrow HK // BC$ mà H là trung điểm AB nên K là trung điểm của AN . Suy ra $AK = KN$.

Có: $AK = KN = BK$ mà $AK = KN$ nên $SM = CM$ nên M là trung điểm của SC .

$SM \quad CM \quad BM$

4. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn tâm O .

Ta có $\angle A' DA = 90^\circ \Rightarrow DA' \perp DA$ mà $EF \perp DA \Rightarrow EF // DA'$.

Kéo dài EF cắt BA' tại G .

rung điểm của BD nên G là trung điểm của BA' .

ính đường tròn tâm O nên A' cố định $\Rightarrow BA'$ cố định. Vậy G cố định.

$\Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AG cố định (đpcm).

Câu 14. Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. M là một điểm trên đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại P, Q .

5. Chứng minh rằng: Tứ giác $APMQ$ nội tiếp.

6. Chứng minh rằng: $AP + BQ = PQ$.

7. Chứng minh rằng: $AP \cdot BQ = AO^2$.

8. Khi điểm M di động trên đường tròn (O) , tìm các vị trí của điểm M sao cho diện tích tứ giác $APQB$ nhỏ nhất.

Giải:

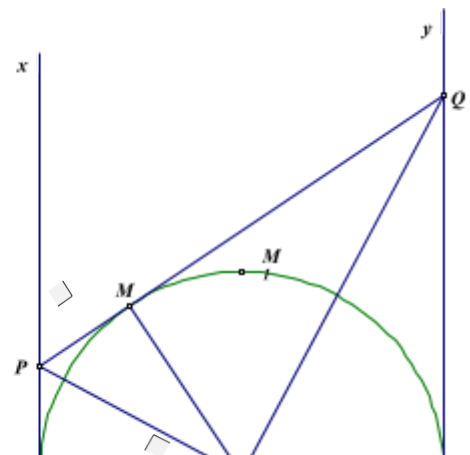
· Xét tứ giác $APMQ$, ta có $\angle O \square AP \square O \square MP \square 90^\circ$
(vì PA, PM là tiếp tuyến của (O))

Vậy tứ giác $APMQ$ nội tiếp.

· Ta có: $AP = MP$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$BQ = MQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một

$\square AP \square BQ \square MP \square MQ \square PQ \square PA \square PB \square$



Mà $\sphericalangle AOM \square B \square OM \square 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\square P \square OQ \square 90^\circ$

Xét ΔPOQ có:

$$\widehat{POQ} = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

$OM \perp PQ$ (PQ là tiếp tuyến của (O) tại M)

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔPOQ

vuông tại O có đường cao OM

$$\Rightarrow MP \cdot MQ = OM^2 \text{ (hệ thức lượng)}$$

Lại có $MP = AP$; $MQ = BQ$ (cmt); $OM = OA$

nên tứ giác $APQB$ là hình thang

(bán kính) Do đó $AP \cdot BQ = AO^2$ (Đpcm).

4. Tứ giác $APQB$ có: $AP \parallel BQ$ ($AP \perp AB$; BQ

$\perp AB$),

vuông.

$$\Rightarrow S_{APQB} = \frac{(AP + BQ) \cdot AB}{2} = \frac{PQ \cdot AB}{2}$$

Mà AB không đổi nên S_{APQB} đạt GTNN $\Leftrightarrow PQ$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow PQ = AB \Leftrightarrow PQ \parallel AB \Leftrightarrow OM \perp AB$$

$$\Leftrightarrow M \text{ là điểm chính giữa } \overline{AB}$$

Tức M trùng M_1 hoặc M_2 thì S_{APQB} đạt GTNN $\frac{AB^2}{2}$.
là

Câu 15. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến

AM, AN với các đường tròn (O) ($M, N \in (O)$). Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn

(O)

tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng

BC .

4. Chứng minh tứ giác $ANHM$ nội tiếp được trong đường tròn.

Chứng minh

5. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$.

6. Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E .

$EH \parallel NC$.

Gi

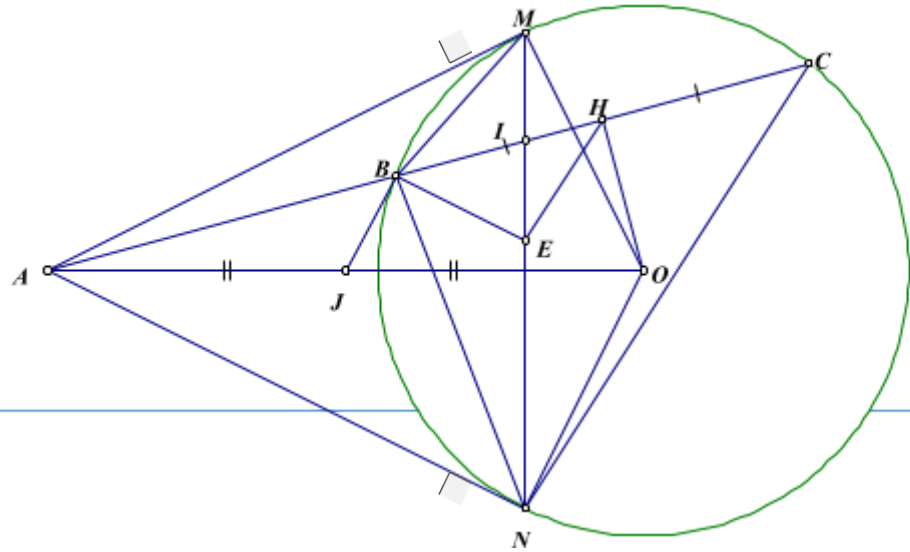
∴

1. Vì AN, AM

là tiếp tuyến

$\square ANO \square$
nên

$\square AMO \square \hat{=}$ 9



webtoan.c

om

Gọi J là trung điểm của AO

Vì H là trung điểm của BC nên $OH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHO} = 90^\circ$

$\Rightarrow H, O \in$ đường tròn đường kính AO

Suy ra A, O, M, N, H thuộc đường tròn tâm J đường kính AO

Suy ra $AMHN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2. Có $\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung BN và góc nội tiếp chắn BN)

Xét $\triangle ANB$ và $\triangle ACN$ có:

$$\widehat{ANB} = \widehat{ACN} \quad \widehat{BAN} \text{ chung} \quad (\text{cmt})$$

$$\Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle ACN \quad (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB \cdot AC.$$

$$\frac{AC}{AN}$$

3. Gọi I là giao điểm của MN và AC

Ta có MN là trục đẳng phương của đường tròn (J) và (O) .

$I \in MN$ nên phương trình tích của I đối với (J) và (O) bằng nhau.

$$\Rightarrow IA \cdot IH = IB \cdot IC \Rightarrow \frac{IB}{IA} = \frac{IH}{IC}$$

$$\text{Vì } BE \parallel AN \text{ nên } \frac{IB}{IE} = \frac{IA}{IN} \Rightarrow \frac{IB}{IE} = \frac{IH}{IC} \Rightarrow EH \parallel NC.$$

$$\frac{IA}{AN} = \frac{IN}{IC}$$

Câu 16. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ 2

tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn $(O; R)$ (P, Q là 2 tiếp điểm). Lấy M thuộc đường tròn

$(O; R)$ sao cho PM song song với AQ . Gọi N là giao điểm

thứ hai của đường thẳng AM

Đề bài tập bình
lớp 9

$(O; R)$. Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K .

Website:

webtoan.com

đường tròn đường kính

và tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp và $KA^2 = KN.KP$

5. Kẻ đường kính QS của đường tròn $(O; R)$. Chứng minh NS là tia phân giác của \widehat{PNM} .
6. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK . Tính độ dài đoạn thẳng AG theo bán kính R .

Giải:

o

1. Ta có: $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90^\circ$

Trong tứ giác $APOQ$ có tổng hai góc đối bằng 180°

Suy ra tứ giác $APOQ$ nội tiếp đường tròn

$PM \parallel AQ \Rightarrow \widehat{PMN} = \widehat{KAN}$ (so le trong)

Mà $\widehat{PMN} = \widehat{PAK}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung \widehat{PN} và góc nội tiếp chắn \widehat{PN})

$\Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{PAK}$ (O) ở Q) Mà $PM \parallel AQ$

(giả thiết) nên $PM \perp QS$

Xét $\triangle KAN$ và $\triangle KPA$ có:

\widehat{K} chung

Đường kính $QS \perp PM$ nên

$\widehat{KAN} = \widehat{KPA}$ (cmt)

QS đi qua điểm chính giữa

$\Rightarrow \triangle KAN \cong \triangle KPA$ (g.g)

$\Rightarrow KA = KN \Rightarrow KA^2 =$

PM

$KN \cdot KP$ (Đpcm).

$KP = KA$

2. Ta có: $AQ \perp QS$

(AQ là tiếp tuyến của

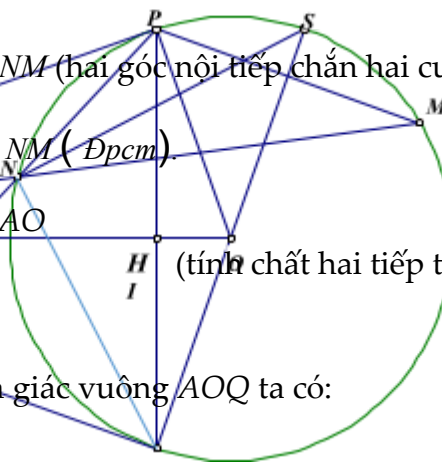
$sđ \widehat{P} \widehat{S} = sđ \widehat{S} \widehat{M} \Rightarrow \widehat{P} \widehat{NS} = \widehat{S} \widehat{NM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) Hay NS là tia phân giác $\widehat{P} \widehat{NM}$ (Đpcm).

3. Gọi H là giao điểm của PQ và AO

$\Rightarrow AH \perp PQ$

(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

trục lượng trong tam giác vuông AOQ ta có:



Các bài tập hình học

9

$$OQ^2 = OH \cdot OA \Rightarrow OH = \frac{OQ^2}{OA} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

$$\Rightarrow AH = OA - OH = 3R - \frac{1}{3}R = \frac{8}{3}R$$

$$\widehat{K}PQ = \widehat{N}QK \quad (\text{góc nội tiếp chắn } \widehat{N}Q)$$

$$\widehat{N}QK = \widehat{N}QK \quad (\text{góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung } \widehat{N}Q)$$

$$\Rightarrow \widehat{N}QK = \widehat{K}PQ$$

Xét ΔKNQ và ΔKQP có:

$$\widehat{N}QK = \widehat{K}PQ \text{ (cmt)}$$

KQ chung

$$\Rightarrow \Delta KNQ \sim \Delta KQP \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{KN}{KQ} = \frac{KQ}{KP} \Rightarrow KQ^2 = KN \cdot KP$$

Mà $AK^2 = NK \cdot KP$ nên $AK = KQ$

Vậy ΔAPQ có các trung tuyến AH và PK cắt nhau ở G nên G là trọng tâm

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3}R = \frac{16}{9}R$$

Câu 17. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao

BE, CF cắt nhau tại H . Tia AO cắt đường tròn (O) tại D .

4. Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn;
5. Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;

ng điểm của BC , tia AM cắt Chứng minh G là trọng tâm của

C .

- Xét tứ giác $BCEF$ có $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$

(cùng nhìn

cạnh BC)

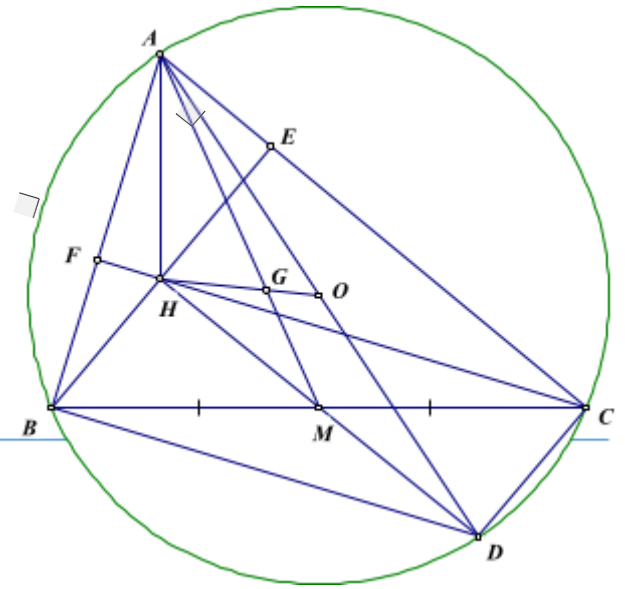
- Tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

- Ta có: $\angle ACD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) □ $DC \perp AC$

Mà $HE \perp AC$; suy ra $BH \parallel DC$ (1)

webtogn.com tương tự: $CH \parallel BD$ (2)

om



HD.

Do đó AM, HO là các đường trung tuyến của $\Delta AHD \Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔAHD

$$\Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$$

Xét tam giác ABC có M trung điểm của BC và $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$

Suy ra G là trọng tâm của ΔABC .

Câu 18. Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho $AC = R$. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA . Lấy điểm M bất kì trên (O) không trùng với A, B . Tia BM cắt đường thẳng d tại P . Tia CM cắt đường tròn (O)

tại điểm thứ hai là N , tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q .

5. Chứng minh tứ giác $ACPM$ là tứ giác nội tiếp;
6. Tính $BM \cdot BP$ theo R .
7. Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song;
8. Chứng minh trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi trên (O) .

Giải:

1. Ta có AB là đường kính của

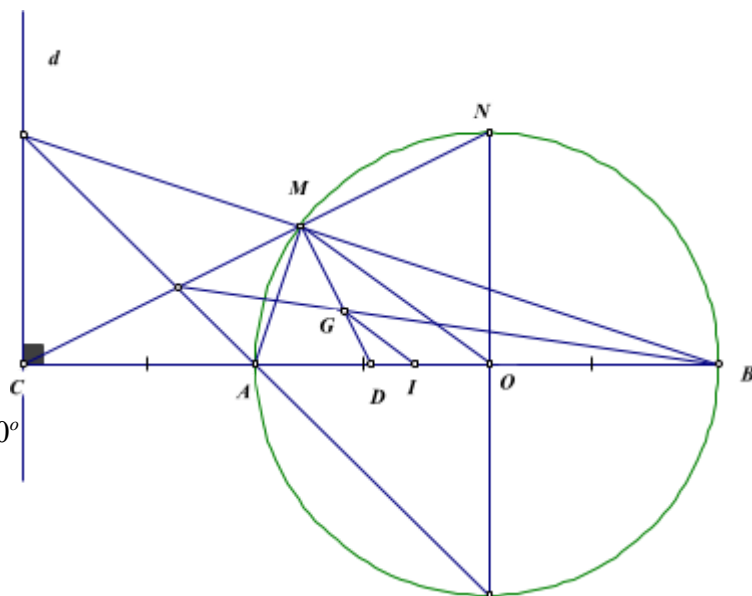
$(O), M \in (O) \Rightarrow \widehat{AMB}$ là góc nội

tiếp chắn nửa đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMP} = 90^\circ.$$

Mặt khác

$$\widehat{ACP} = 90^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{AMP} + \widehat{ACP} = 180^\circ$$



mà hai góc ở vị trí đối nhau
Suy ra tứ giác $ACPM$ nội tiếp đường
tròn.

2. Xét $\triangle BAM$ và $\triangle BPC$ có:

$$\widehat{AMB} = \widehat{CP} = 90^\circ$$

ϱ

\widehat{MBA} chung

$$\Rightarrow \triangle BAM \# \triangle BPC (g.g)$$

BP

$$\Rightarrow BM \cdot BP = BA \cdot BC = 2R \cdot 3R = 6R^2.$$

3. Ta có:

$AMNQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{M}NQ = \widehat{P}AM$ (góc trong tại một đỉnh và góc ngoài tại đỉnh đối diện) (1)

$AMPC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{P}CM = \widehat{P}AM$ ($\widehat{P}AM$) (2)

(hai góc nội tiếp cùng chắn

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{M}NQ = \widehat{P}CM$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow PC \parallel NQ$.

4. Gọi D là trung điểm

của $BC \Rightarrow D$ là điểm cố định

Qua G kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại I

G là trọng tâm ΔBCM nên $G \in MD$ và $MG = \frac{2}{3} MD$ (tính chất trọng tâm trong tam giác)

Do $GI \parallel MO$ $\Rightarrow \frac{OI}{MG} = \frac{OD}{MD} \Rightarrow OI = \frac{2}{3} OD$

Áp dụng định lý Ta-lét cho ΔDMO ta có $I \in DO$ và

$$\frac{OD}{MD} = \frac{OI}{MD} = \frac{2}{3}$$

Mà O, D là hai điểm cố định nên I cố định

Do $GI \parallel MO$ nên theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{GI}{MO} = \frac{DG}{DM} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG = \frac{1}{3} MO = R$

$$\frac{MO}{R} = \frac{DM}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$\Rightarrow G$ luôn cách điểm I cố định một khoảng không đổi.

⇒ Khi M di động, điểm G luôn nằm trên đường tròn tâm I , bán kính R .

3

Câu 19. Cho ΔABC có ba góc nội tiếp đường tròn (O) , bán kính R . Hạ đường cao AH, BK

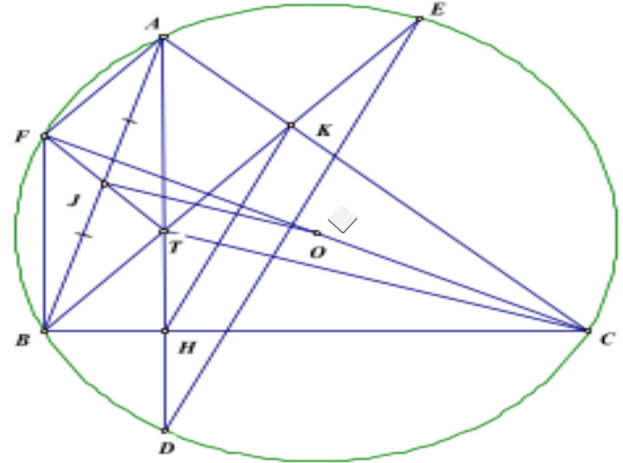
của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E .

4. Chứng minh tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
5. Chứng minh. $HK // DE$.
6. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Giải:

HK có $\widehat{AKB} = \widehat{AHB}$

mà hai góc cùng nhìn cạnh AB
 Suy ra tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn đường kính AB .
 Theo câu trên tứ giác $ABHK$ nội tiếp (J) với J là trung điểm của AB
 Nên $\widehat{AH} = \widehat{KH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{H} của (J))
 Mà $\widehat{AH} = \widehat{AD}$ (A, H, K thẳng hàng) $\widehat{AD} = \widehat{ED}$ (hai góc cùng chắn \widehat{D} của (O))
 Suy ra $\widehat{KH} = \widehat{ED}$, mà hai góc này



ở vị trí đồng vị nên $HK \parallel DE$.

3. Gọi T là giao điểm của hai đường cao AH và BK

Tứ giác $CHTK$ có $\widehat{HT} = \widehat{KT} = 90^\circ$ (*)

Suy ra tứ giác $CHTK$ nội tiếp đường tròn đường kính CT

Do đó CT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CHK$

Gọi F là giao điểm của CO với (O) hay CF là đường kính của (O)

Ta có: $\widehat{AF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FA \perp CA$

Mà $BK \perp CA$ (gt)

Nên $BK \parallel FA$ hay $BT \parallel FA$ (1)

Ta có: $\widehat{BF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FB \perp CB$

Mà $AH \perp CB$ (gt)

Nên $AH \parallel FB$ hay $AT \parallel FB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $AFBT$ là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song)

Do J là trung điểm của đường chéo AB

Nên J cũng là trung điểm của đường chéo FT (tính chất đường chéo hình bình hành)

Xét ΔCTF có O là trung điểm của FC , J là trung điểm của FT

Nên OJ là đường trung bình của ΔCTF

$$\Rightarrow OJ = \frac{1}{2} CT \quad (**)$$

2

Từ (*) và (**) ta có độ dài của OJ bằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK

Mà độ dài của OJ là khoảng cách từ tâm O đến dây AB (J là trung điểm của dây AB)

AB cố định nên độ dài OJ không đổi.
 n kính đường tròn ngoại tiếp $\square CHK$ không

đổi.

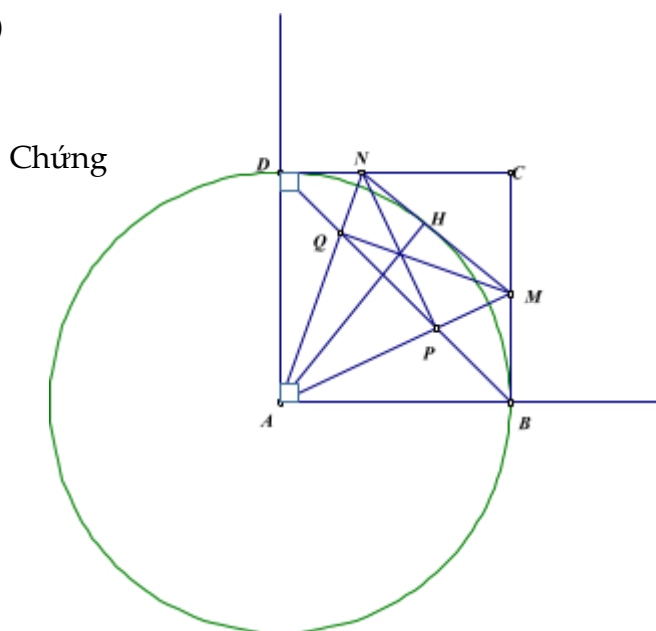
Câu 20. Cho $\angle xAy = 90^\circ$, vẽ đường tròn tâm A Đường tròn này cắt Ax, Ay thứ
 bán kính R .

tự tại B và D . Các tiếp tuyến với đường tròn(A) kẻ từ B và D cắt nhau tại C .

4. Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Chứng minh?
5. Trên BC lấy điểm M tùy ý (M khác B và C)

kẻ tiếp tuyến MH với đường tròn(A), (H
 là tiếp điểm). MH cắt CD tại N .
 minh rằng $\angle MAN = 45^\circ$.

6. $P; Q$ thứ tự là giao điểm của $AM; AN$ với
 BD . Chứng minh rằng $MQ; NP$ là các
 đường cao của $\triangle AMN$.



Giải:

1. Theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$$\angle CBA = \angle ACD = 90^\circ$$

Xét tứ giác $ABCD$ có:

$$\angle B \hat{A} D = 90^\circ$$

$$\angle C \hat{B} A = \angle A \hat{C} D = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow ABCD$$

là hình chữ nhật.

Ta có $AB = AC = R$ nên $ABCD$ là hình vuông.

2. Xét $\triangle ADN$

vuông và $\triangle AHN$

vuông có:

$\{ AN \text{ chung}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \\ AD = AH = R \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \triangle ADN = \triangle AHN$$

(cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{HAN}$$

$$\text{Tương tự: } \widehat{DAN} + \widehat{HAN} + \widehat{HAM} + \widehat{BAM} = \widehat{A} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 2\widehat{HAN} + 2\widehat{HAM} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HAN} + \widehat{HAM} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MAN} = 45^\circ.$$

3. Xét $\triangle BCD$ vuông có: $BC = CD = R$

$$\Rightarrow \triangle BCD \text{ vuông cân tại } C \Rightarrow \widehat{CBD} = 45^\circ$$

□ Tứ giác $ABMQ$ là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{AQM} + \widehat{ABM} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AQM} = 180^\circ - \widehat{ABM} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$\Rightarrow MQ \perp AN \Rightarrow MQ$ là đường cao của ΔAMN (đpcm)

Tương tự $ADNP$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow NP \perp AM \Rightarrow NP$ là đường cao trong ΔAMN

Vậy MQ, NP là các đường cao trong ΔAMN (đpcm)

Câu 21. Cho

ΔABC ($AB < AC$) có 3 góc nhọn nội tiếp trong

đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường

cao AH của

ΔABC ,

đường kính AD của đường tròn.
 Gọi E, F lần lượt là chân đường

vuông góc kẻ từ C và B xuống đường thẳng AD . M là trung điểm của BC .

4. Chứng minh các tứ giác $ABHF$ và $BMFO$ nội tiếp.

5. Chứng minh

$$HE \parallel BD.$$

6. Chứng minh S^{ABC}

$$= \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$$

(S_{ABC} là diện tích ΔABC).

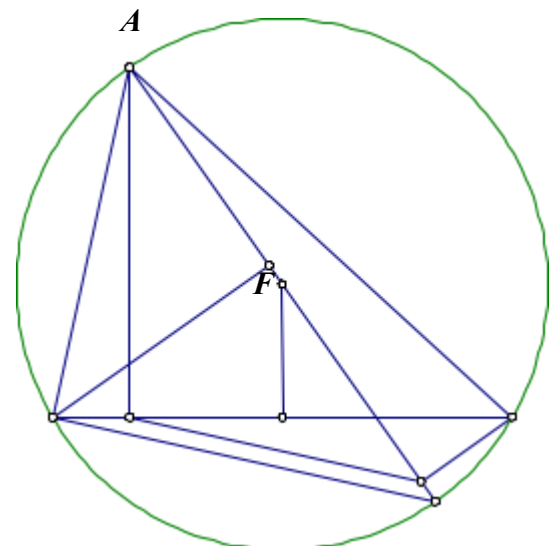
Giải:

1. Theo đề bài ta có: $\widehat{AHB} = \widehat{FA} = 90^\circ$ mà 2 góc cùng nhìn cạnh AB

Vậy tứ giác $ABHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB .

Có M là trung điểm của BC mà BC là dây cung

nên $OM \perp BC$

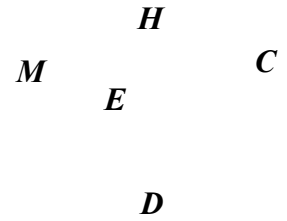


Khi đó
nhau

$\widehat{FO} = \widehat{MO} = 90^\circ$ mà 2 góc ở vị trí đối

O

Vậy tứ giác $BMOF$ nội tiếp đường tròn đường kính OB .



2. Theo đề bài: $\widehat{EC} = \widehat{HC} = 90^\circ \Rightarrow ACEH$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{HE} = \widehat{AE} = 1$ (2 góc nội tiếp cùng chắn

\widehat{EC})

\widehat{CE}

2

Lại có: $\widehat{AE} = \widehat{AD} = \widehat{BD} = 1$ (\widehat{D} cùng chắn

góc nội tiếp cùng chắn

2

C[□] BD mà chúng ta sẽ đi tìm giá trị của nó

$$\frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} BC \cdot AB \cdot \sin A = BC \cdot AH = AB \cdot \sin$$

$$A \cdot BC =$$

Mặt khác trong ΔABC có: $\angle ABD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $AB = AD \cdot \sin \angle ADB = 2R \sin A \cdot CB$ ($\angle ADB = \angle ACB$ vì hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{AB})

$$\| AC = 2R \cdot \sin A \cdot BC$$

Tương tự ta có: $BC = 2R \cdot \sin B \cdot AC$

Ta có: $AB \cdot AC \cdot BC = 8R^3 \cdot \sin A \cdot CB \cdot \sin A \cdot BC \cdot \sin B \cdot AC$ (1)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin B \cdot AC \cdot 2R \cdot \sin A \cdot CB \cdot \sin C = 2R^2 \cdot \sin B \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot AB \cdot AC \cdot BC$$

$$C \cdot BA(2)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot BC$$

Từ (1) và (2) \Rightarrow

$$\frac{S_{ABC}}{AB \cdot BA \cdot CA} = \frac{1}{4R}$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{R}$$

Câu 22. Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) ba đường cao AP, BM, CN của ΔABC cắt nhau tại H .

5. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp.

6. Chứng minh $\Delta ANM \simeq \Delta ACB$.

7. Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh $BD = BE$.

8. Giả sử $AB = 4\text{cm}$; $AC = 5\text{cm}$; $BC = 6\text{cm}$. Tính MN .

Giải:

1. Ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^\circ$

Mà hai đỉnh M, N cùng nhìn BC

\Rightarrow Tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét ΔANM và ΔACB có:

\widehat{A} chung

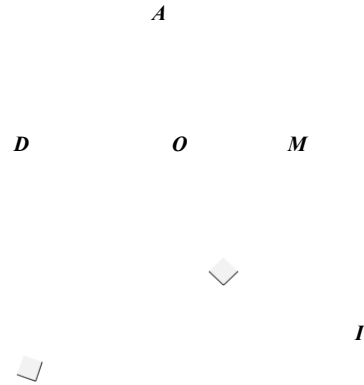
$\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với \widehat{BNM})

$\Rightarrow \Delta ANM \simeq \Delta ACB$ (g.g).

3.

AH

Gọi I là tâm đường tròn đường kính CH



Gọi O là tâm đường tròn đường kính

P

E

B
 C

Các bài tập hình học

9

Xét $\triangle BDH$ và $\triangle BMD$ có:

\widehat{B} chung

$\widehat{BDH} = \widehat{BMD}$ (cùng phụ với \widehat{MDH})

Suy ra: $\triangle BDH \sim \triangle BMD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow BD^2 = BM \cdot BH \quad (1)$$

$BM \cdot BD$

Ta có:

$$\widehat{EMC} = \widehat{HCE} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{EC})$$

$$\text{Mà } \widehat{HME} + \widehat{EMC} = 90^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{HME} + \widehat{HCE} = 90^\circ$$

Lại có $\widehat{HEI} = \widehat{HIE}$ do $\triangle HIE$ cân tại I

$$\Rightarrow \widehat{HME} + \widehat{HIE} = 90^\circ$$

Xét $\triangle BHE$ và $\triangle BEM$ có:

\widehat{HBE} chung

$\widehat{BEH} = \widehat{BEM}$ (cùng phụ với \widehat{HEI})

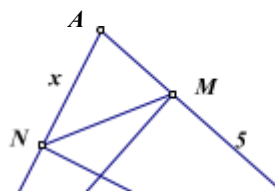
Suy ra: $\triangle BHE \sim \triangle BEM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BE} = \frac{BE}{BM} \Rightarrow BE^2 = BM \cdot BH \quad (2)$$

Suy ra: $BE = BD$.

$$B = 4 - x \quad (0 < x < 4)$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có:



$$CN^2 = AC^2 - AN^2$$

$$\text{Mà } CN^2 = BC^2 - BN^2$$

$$\Rightarrow AC^2 - AN^2 = BC^2 - BN^2$$

$$\Leftrightarrow 5^2 - x^2 = 6^2 - (4 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow 25 - x^2 = 36 - 16 + 8x - x^2$$

$$\Leftrightarrow 25 - 36 + 16 = 8x$$

$$\Leftrightarrow 8x = 5$$

B

C

$$\Leftrightarrow x = 0,625$$

Vậy $AN = 0,625$

Lại có: $\triangle ANM \sim \triangle ACB$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

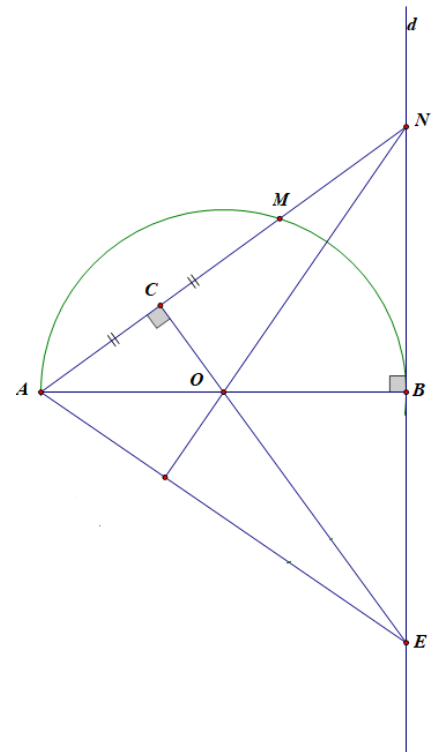
$$\Rightarrow MN = \frac{AN \cdot BC}{AC} = \frac{0,625 \cdot 6}{5} = 0,75 \text{ (cm)}.$$

Các bài tập hình học

9

Câu 23. Cho nửa đường tròn O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B). C là trung điểm của dây cung AM . Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B . Tia AM cắt d tại điểm

- N . Đường thẳng OC cắt d tại E .
- Chứng minh: tứ giác $OCNB$ nội tiếp.
 - Chứng minh: $AC \cdot AN = AO \cdot AB$.
 - Chứng minh: NO vuông góc với AE .
 - Tìm vị trí điểm M sao cho $(2 \cdot AM + AN)$ nhỏ nhất.



Giải:

- Theo tính chất dây cung ta có:

$$OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OCN} = 90^\circ$$

BN là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow OB \perp BN \Rightarrow \widehat{OBN} = 90^\circ$

Xét tứ giác $OCNB$ có tổng góc đối:

$$\widehat{OCN} + \widehat{OBN} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Do đó tứ giác $OCNB$ nội tiếp.

- Xét ΔACO và ΔABN có:

\widehat{CAO} chung

$$\widehat{ACO} = \widehat{ABN} = 90^\circ$$

Suy ra $\Rightarrow \Delta ACO \sim \Delta ABN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AO}{AN}$

$$AC \cdot AN = AO \cdot AB$$

Do đó: $AC \cdot AN = AO \cdot AB$ (đpcm).

- Theo chứng minh trên ta có:

$$OC \perp AM \Rightarrow EC \perp AN \Rightarrow EC \text{ là đường cao của } \Delta ANE \text{ (1)}$$

$$OB \perp BN \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow AB \text{ là đường cao của } \Delta ANE \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O$ là trực tâm của ΔANE (vì O là giao điểm của AB và EC)

$\Rightarrow NO$ là đường cao thứ ba của ΔANE

Suy ra $NO \perp AE$ (đpcm).

2. Ta có: $2AM + AN = 4AC + AN$ (vì C là trung điểm của AM)

$$4AC \cdot AN = 4AO \cdot AB = 4R \cdot 2R = 8R^2$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$$4AC + AN \geq 2 \sqrt{4AC \cdot AN} = 2 \sqrt{8R^2} = 4\sqrt{2}R$$

$M + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$ khi $4AC = AN$

BM

Vậy với M là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB thì $2AM + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$.

Câu 24. Cho đường tròn tâm O bán kính R cắt

và đường thẳng (d) không đi qua O ,

Lấy điểm M bất kỳ trên tia đối BA , qua M kẻ hai tiếp đường tròn (O) tại 2 điểm A, B .

tuyến

MC, MD với đường tròn $(C, D$ là các tiếp điểm).

- Chứng minh tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.
- Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh HM là phân giác của \widehat{CHD} .
- Đường thẳng đi qua O và vuông góc với MO cắt các tia MC, MD theo thứ tự

tại P, Q . Tìm vị trí

của điểm M trên (d)

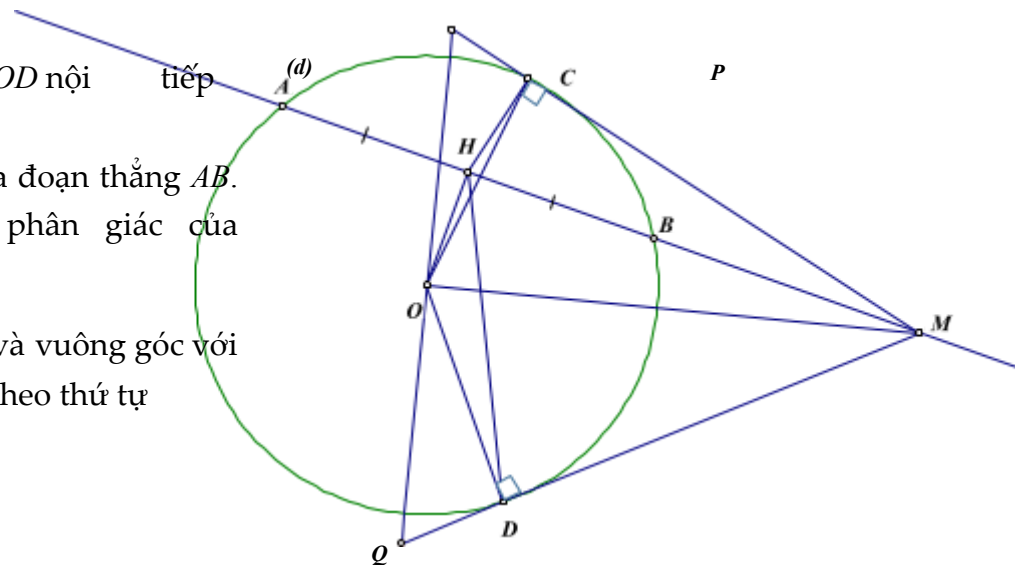
sao cho diện tích ΔMPQ nhỏ nhất.

Giải:

- Xét tứ giác $MCOD$ có:

$$MC \perp OD \Rightarrow \widehat{OCM} = 90^\circ; MD \perp OC \Rightarrow \widehat{ODM} = 90^\circ$$

Suy ra tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.



2. Ta có H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow \widehat{MHO} = 90^\circ \Rightarrow H$ thuộc đường kính MO

\Rightarrow 5 điểm $D; M; C; H; O$ cùng thuộc đường tròn đường kính MO

$\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{DOM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MD)

$\widehat{CHM} = \widehat{COM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Lại có $\widehat{DOM} = \widehat{COM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{CHM} \Rightarrow HM$ là phân giác \widehat{CHD} .

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMP ta có:

$$CM \cdot CP = OC^2 = R^2 \text{ không đổi} \Rightarrow S \geq 2R^2$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow CM = CP = R\sqrt{2}$. Khi đó M là giao điểm (d) với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

Vậy M là giao điểm của (d) với đường tròn tâm O bán kính R thì diện tích ΔMNP nhỏ nhất.

Câu 25. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc AC ; E thuộc AB).

3. Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được trong một đường tròn;

4. Gọi

M, I lần lượt là trung điểm của AH và BC .

Chứng minh MI vuông góc với ED .

Giải:

1. Tứ giác $ADHE$ có: $AD \perp DH$ (gt); $AE \perp EH$ (gt)

Nên $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$

Do đó: $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^\circ$

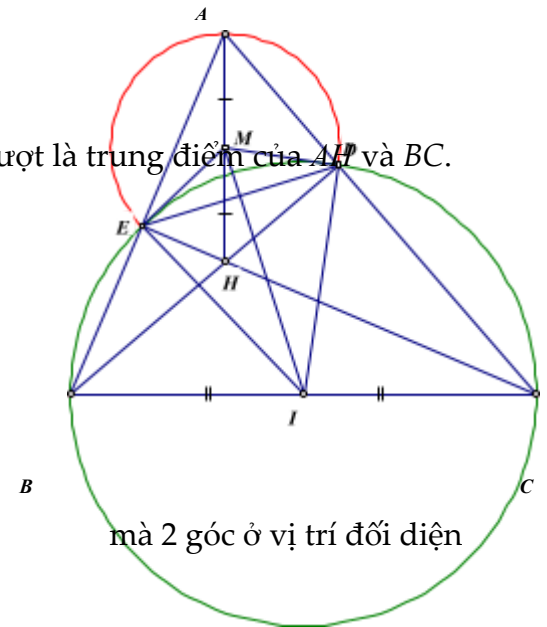
Vậy tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác $BEDC$ có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ (gt) nên cùng nội tiếp đường tròn tâm I đường kính BC (1)

Tương tự: Tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính AH và E, D là giao điểm của I và đường tròn

Dễ dàng chứng minh $\Delta EMI = \Delta DMI$ (c.c.c)



mà 2 góc ở vị trí đối diện

$\Rightarrow MI$ là phân giác \widehat{DME}

Mà $\triangle DMI$ cân tại M ($MD = ME$)

$\Rightarrow MI \perp DE$ (Đpcm).

Câu 26. Cho $\triangle ABC$ có ba góc đều nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O , kẻ đường cao AH . Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC . Kẻ NE vuông góc

cắt đường tròn tại F .

4. Chứng minh $\widehat{A}BC + \widehat{A}CB = \widehat{B}IC$ và tứ giác $DENC$ nội tiếp được trong một đường tròn.
5. Chứng minh hệ thức $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ và tứ giác $BFIC$ là hình thang cân.
6. Chứng minh: tứ giác $BMED$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Giải:

1. Vì $ABIC$ là tứ giác nội tiếp nên:

$$\widehat{A}BC = \widehat{A}IC; \widehat{A}CB = \widehat{AIB}$$

$$\Rightarrow \widehat{A}BC + \widehat{A}CB = \widehat{A}IC + \widehat{AIB} = \widehat{B}IC$$

Vì $NE \perp AD; NC \perp CD$ nên $\widehat{N}ED = \widehat{N}CD = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{N}ED + \widehat{N}CD = 180^\circ \text{ mà 2 góc ở vị trí đối nhau}$$

Suy ra tứ giác $DENC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông AHB và AHC có:

$$AM \cdot AB = AH^2; AN \cdot AC = AH^2 \Rightarrow AM \cdot AB = AN \cdot AC$$

Có $\widehat{I}AC = 90^\circ - \widehat{A}IC; \widehat{B}AF = 90^\circ - \widehat{ABH}; \widehat{A}IC = \widehat{ABH} \Rightarrow \widehat{I}AC = \widehat{B}AF$

Suy ra số đo hai cung IC và BF bằng nhau $\Rightarrow IC = BF$

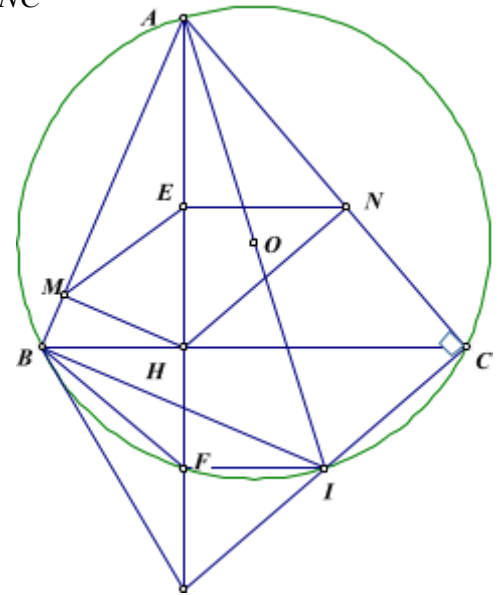
Mặt khác vì $ABFI$ và $ABIC$ nội tiếp nên Suy $\widehat{B}AF = \widehat{B}IF; \widehat{I}AC = \widehat{I}BC; \widehat{B}IF = \widehat{I}BC$

ra $IF \parallel BC \Rightarrow BCIF$ là hình thang

Vì $\widehat{B}AF = \widehat{C}AI \Rightarrow \widehat{B}AI = \widehat{C}AF$

$$\Rightarrow \widehat{F}C = \widehat{B}I \Rightarrow FC = BI$$

Hình thang $BCIF$ có $FC = BI \Rightarrow BCIF$ là hình thang cân.



D

3. Có $\Delta AEN \#$

$AGD (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow AE \cdot AD = AN \cdot AC = AM \cdot AB \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AD}$$

Xét ΔAME và ΔADB có:

$$AE = AM \text{ (cmt);}$$

$\widehat{M} = \widehat{A}$ chung

$$AB = AD$$

Suy ra $\Delta AME \# ADB (c.g.c)$

Suy ra $BMED$ nội tiếp đường tròn.

Câu 27. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB .

thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C ,

đường tròn (O) tại điểm M . Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F , tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E . Đường

thẳng AE cắt nửa đường tròn (O)

điểm D (D khác A).

4. Chứng minh: $AD \cdot AE = AC \cdot AB$.

5. Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CDN$.

6. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp

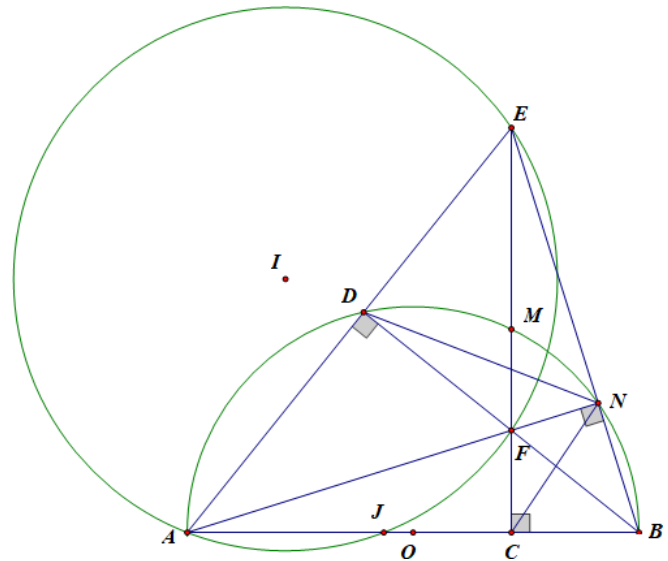
$\triangle AEF$. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB .

Giải:

1. Có $\widehat{ADB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn

cắt nửa



Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ACE$

có:

Các bài tập hình

Website:

webtoan.com

$$\widehat{ADB} = \widehat{CE} = 90^\circ$$

$\widehat{A} = \widehat{ME} = \widehat{ADB} = \widehat{B} = \widehat{ME} = \widehat{ADB} = 180^\circ$ mà 2 góc ở vị

trí đối diện

$$\Rightarrow \triangle ADB \cong \triangle ACE$$

(g.g)

$$ID.AE = AC.AB \quad (\text{Đpcm})$$

$EC \perp AB$, EC giao AN tại F nên F là trực tâm của $\triangle AEB \Rightarrow BF \perp EA$

Ma $BD \perp EA \Rightarrow B, D, F$ thẳng hàng

Tứ giác $ADFC$ có hai góc đối bằng 90° nên tứ giác $ADFC$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{DCF} = \widehat{DAF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{DF})

Tương tự ta có: $\widehat{NCF} = \widehat{NBF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{NF})

Các bài tập hình học

9

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{NBF}$ (cùng phụ với \widehat{AEB}) $\Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{NCF}$

Suy ra CF là phân giác \widehat{DCN}

Tương tự cũng có DF là phân giác \widehat{NDC}

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DCN$

2. Gọi J là giao điểm của (I) với đoạn AB

Có $\widehat{FAC} = \widehat{CEB} = 90^\circ - \widehat{ABE} \Rightarrow \triangle FAC \sim \triangle BEC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{FC}{AC} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow CF \cdot CE = BC \cdot AC \quad (1)$$

Vì $AEFJ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FJC} = \widehat{FEA} = 180^\circ - \widehat{AJF}$

$$\Rightarrow \triangle CFJ \sim \triangle CAE$$
 (g.g) $\Rightarrow CF \cdot CE = CA \cdot CJ$ (2)

$$CF = CJ$$

$$CA \cdot CE$$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \cdot AC = CA \cdot CJ \Rightarrow BC = CJ \Rightarrow C$ là trung điểm của BJ (vì $J \neq B$)

) Suy ra J là điểm cố định

Có $IA = IJ$ nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ là đường thẳng cố định.

Câu 28. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm (O) , vẽ đường kính AD . Đường thẳng đi qua

B vuông góc với AD tại E và cắt AC tại F . Gọi H là hình chiếu của B trên AC và M là trung điểm của BC .

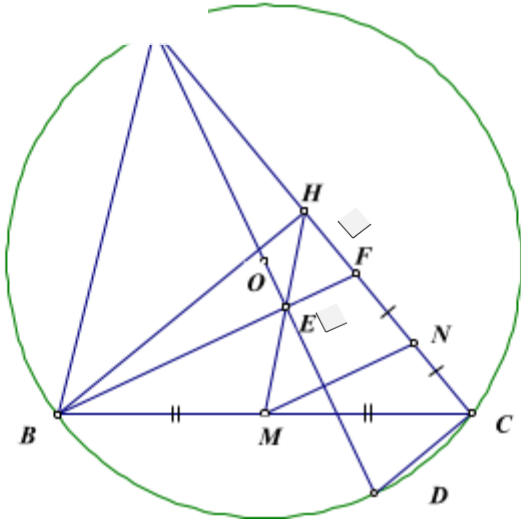
$\sphericalangle CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

$$\sphericalangle MHC + \sphericalangle BAD = 90^\circ.$$

$$\sphericalangle HC + \sphericalangle BC = 90^\circ.$$

$$\sphericalangle HF = \sphericalangle HE$$

Giải:



1. Có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì $BE \perp AD$ nên $\widehat{BED} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BED} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ mà hai góc ở vị trí đối nhau Suy ra tứ giác CDEF là tứ giác nội tiếp.

2. Vì M là trung điểm cạnh huyền BC của tam giác vuông BHC nên

$MH = MC = MB \Rightarrow \Delta MHC$ cân tại M (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MCH}$$

Vì ABCD là tứ giác nội tiếp nên:

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{MHC} = \widehat{BCD} + \widehat{MCH} = \widehat{MCH} = 90^\circ.$$

3. Vì $BE \perp AE, BH \perp AH$ nên $\widehat{BEA} = \widehat{BHA} = 90^\circ \Rightarrow ABEH$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BHE} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{BE} \text{)}$$

Mà theo ý 2 ta có: $\widehat{BAE} = 90^\circ - \widehat{MHC} = \widehat{BHM} \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BHM}$

Suy ra H, E, M thẳng hàng.

Gọi N là trung điểm của FC.

$\Rightarrow NM$ là đường trung bình của ΔBFC

$\Rightarrow MN \parallel BF$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{BC}{2} &= \frac{2HM}{2} = \frac{2HN}{2} = \frac{2(HF + FN)}{2} = \frac{2HF + FC}{2} = \frac{HF + HC}{2} = \frac{HC}{2} \\ &= \frac{HC}{2} = 1 + \end{aligned} \text{ (đpcm).}$$

HE HE HF HF HF HF HF

Câu 29. Cho ΔABC nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm M, N ($M \neq B, N \neq C$). Gọi H là giao điểm của BN và CM ; P là giao điểm của AH và BC .

5. Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Trong trường hợp đặc biệt khi $\triangle ABC$ đều cạnh bằng $2a$. Tính chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ theo a .

8. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AE và AF của đường tròn tâm O đường kính BC (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Giải:

1. Ta có: $\angle AMH = 90^\circ; \angle ANH = 90^\circ$ nên M và N cùng

thuộc đường tròn đường kính AH

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác $AMPC$ có $\angle APC = 90^\circ$ (do H là trực tâm của $\triangle ABC$) và $\angle AMC = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BMC \sim \triangle BPA$ (g.g)

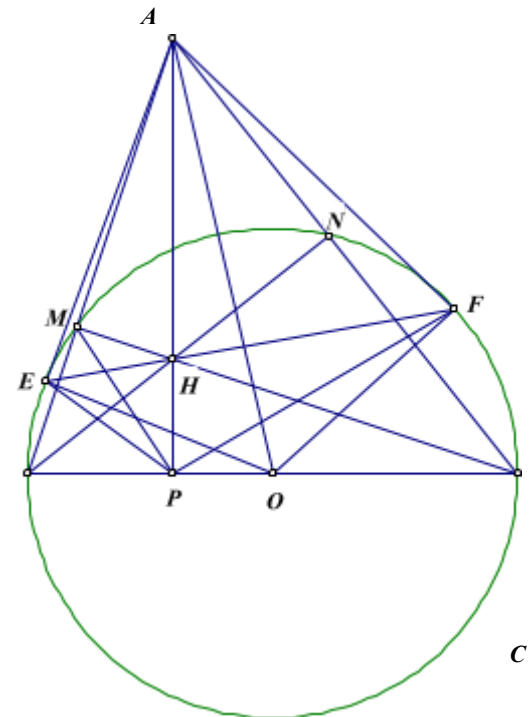
$\Rightarrow BM = \frac{BC}{BA} \cdot BP$. Từ đó suy ra $BM \cdot BA = BP \cdot BC$.

$\frac{BP}{BA}$

3. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ có đường kính AH

$\triangle ABC$

đều nên trực tâm H cũng là trọng tâm



$\Rightarrow AH = \frac{2}{3} \cdot AP = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a}{2} = \frac{2a}{3}$

Chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ bằng:

$\pi \cdot AH = \frac{2\pi a}{3}$

Vậy chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ bằng

4. Ta có: $AH \cdot AP = AM \cdot AB = AE^2 \Rightarrow AH = \frac{AE^2}{AP}$

$AE = AP$

Xét $\triangle AHE$ và $\triangle AEP$ có:

$AH = AE$ (cmt); $\widehat{E} = \widehat{A} = \widehat{P}$ chung

$$\begin{matrix} AE & AP \\ \widehat{A} & \widehat{A} \\ \widehat{H} & \widehat{P} \end{matrix} \quad \widehat{A} \widehat{H} E = \widehat{A} \widehat{E} P \quad (1)$$

Nên $\triangle AHE \cong \triangle AEP$ (c.g.c).

Suy ra

Tương tự ta có: $\widehat{A} \widehat{H} F = \widehat{A} \widehat{P} F$ (2)

Mặt khác: Tứ giác $AFOP$ và $AEOF$ nội tiếp đường tròn đường kính AO nên năm điểm A, E, P, O, F cùng thuộc đường tròn đường kính AO .

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{HE} + \widehat{AHF} = \widehat{EP} + \widehat{FP} = 180^\circ \Rightarrow E, H, F$ thẳng hàng.

Vậy ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Câu 30. Cho ΔABC đều có đường cao AH . Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng với B, C, H). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC .

4. Chứng minh tứ giác $APMQ$ nội tiếp được đường tròn và xác định tâm O của đường tròn này.
5. Chứng minh $OH \perp PQ$.
6. Chứng minh $MP + MQ = AH$.

Giải:

1. Xét tứ giác $APMQ$ có:

$$\widehat{APM} = \widehat{AQM} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{APM} + \widehat{AQM} = 180^\circ \Rightarrow \text{Tứ}$$

giác $APMQ$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AM . Gọi O là trung điểm của AM

\Rightarrow tứ giác $APMQ$ nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AM .

2. Ta có: $\widehat{AHM} = 90^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{AHM}$

nội tiếp

chắn 2 đường tròn đường kính AM

B

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (O)

Ta có: $\widehat{HPQ} = \widehat{HAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn HQ)

$$\widehat{HQP} = \widehat{HAB} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{HP} \text{)}$$

Các bài tập hình

Website:

Mà $\widehat{HAC} = \widehat{HAB}$ (ΔABC đều nên AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác)

Suy ra tứ giác $AEPF$ nội tiếp đường tròn nên: $\widehat{EPF} = \widehat{EAF}$

$$\Rightarrow \widehat{HPQ} = \widehat{HQP} \Rightarrow \Delta HPQ \text{ cân tại } H \Rightarrow HP = HQ \text{ (1)}$$

$$\text{Mà } OP = OQ$$

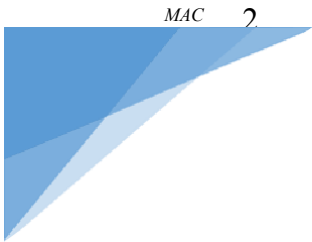
(do $P, Q \in (O)$)

(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH$ là đường trung trực của $PQ \Rightarrow OH \perp PQ$.

1. S

$$= \frac{1}{2} MQ \cdot AC = \frac{1}{2} MQ \cdot BC$$



S_{MAC}^2

$$= \frac{1}{2} MP \cdot AB = \frac{1}{2} MP \cdot BC \quad (\text{do } AB = BC)$$

$\frac{2}{2}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \quad (\text{do } AC \perp BC)$$

BC)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \quad (\text{do } AC = BC)$$

$$S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MAC} = S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot MP \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot MQ \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \Leftrightarrow MP + MQ = AH \quad (\text{đpcm}).$$

Câu 31. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) có bán kính $R = 3$ cm.

Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại D .

5. Chứng minh tứ giác $OBDC$ nội tiếp đường tròn;

6. Gọi M là giao điểm của BC và OD . Biết $OD = 5$ (cm). Tính diện tích $\triangle BCD$

7. Kẻ đường thẳng d đi qua D và song song

với đường tiếp tuyến với (O) tại

các đường thẳng AB, AC lần lượt

tại P, Q . Chứng minh $AB \cdot AP =$

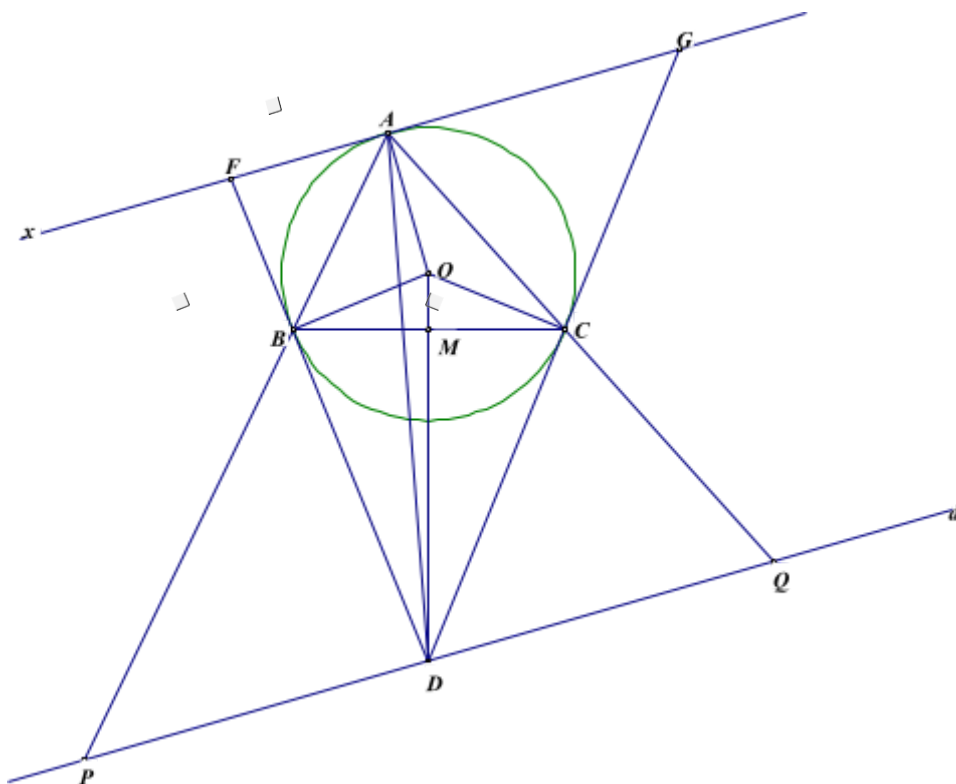
$$AQ \cdot AC.$$

8. Chứng minh $P \overset{\circ}{\sim} AD = M \overset{\circ}{\sim} AC$.

1. Do DB, DC là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow$

$$\overset{\circ}{\angle} BD = \overset{\circ}{\angle} CD = 90^\circ$$

Giải:



A, d cắt

$$\Rightarrow \widehat{OBD} + \widehat{OCD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

mà 2 góc ở vị trí đối nhau

\Rightarrow Tứ giác $OBDC$ là tứ giác nội tiếp.

$$DB \cdot OD = OB^2 \quad 5 \cdot 3^2 = 4 \cdot cm^2$$

Ta có: $OB = OC = R, BD = DC$ (2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow O, D$ thuộc trung trực $BC \Rightarrow OD$ là trung trực $BC \Rightarrow OD \perp BC$

Áp dụng hệ thức lượng vào $\triangle OBD$ vuông, ta có:

$$DM \cdot DO = BD^2 \Rightarrow DM = \frac{BD^2}{DO} = \frac{16}{5} = 3,2 \quad (cm)$$

$$DO = 5$$

$$BM \cdot OD = OB \cdot BD \Rightarrow BM = \frac{OB \cdot BD}{OD} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \quad (cm)$$

$$OD = 5$$

Vậy $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$

$$S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$$

3. Ta có: $\widehat{APQ} = \widehat{B}$ (2 góc so le trong do $Ax \parallel PQ$)

Mà $\widehat{AB} = \widehat{CB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và cung \widehat{AB} và góc nội tiếp chắn \widehat{AB})

$$\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{CB}$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AQP$ có:

$$\widehat{PAQ} \text{ chung; } \widehat{APQ} = \widehat{CB} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AQP \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AP \cdot AQ$$

$$= AC \cdot AQ$$

$$AQ = AP$$

$$\widehat{CB} = \widehat{APD} \text{ (do } \triangle ABC \sim \triangle AQP)$$

$$\Rightarrow \widehat{BP} = \widehat{APD} = \widehat{BPD} \Rightarrow \triangle DBP \text{ cân tại } D$$

$$\Rightarrow DB = DP$$

4. Kéo dài BD cắt tiếp tuyến đi qua A của đường tròn (O) tại F

Ta có: $\widehat{BP} = \widehat{BF}$ (đối đỉnh)

Mà $\widehat{BF} = \widehat{CB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp chắn

\widehat{AB})

Tương tự kéo dài DC cắt tiếp tuyến đi qua A của đường tròn (O) tại G

Ta chứng minh $\widehat{CQ} = \widehat{ACG} = \widehat{BC} = \widehat{QC} \Rightarrow \Delta DCQ$ cân tại D

Lại có $DB = DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow DP = DQ \Rightarrow D$ là trung điểm PQ

Ta có: $\Delta ABC \sim \Delta AQP$ (cmt) $\Rightarrow \frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{PQ} = \frac{2MC}{2PD} = \frac{AC}{AP} = \frac{MC}{PD}$

Xét ΔAMC và ΔADP có:

$\widehat{CM} = \widehat{APD}$ ($\widehat{CB} = \widehat{APQ}$ - cmt); $\frac{AC}{AP} = \frac{MC}{PD}$

$\Rightarrow \Delta AMC \sim \Delta ADP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{AC}$ (đpcm).

Câu 32. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C cố định trên nửa đường

tròn. Điểm M thuộc cung AC ($M \neq A; C$). Hạ $MH \perp AB$ tại H . Nối MB cắt CA tại E . Hạ

$EI \perp AB$

tại I . Gọi K là giao điểm của AC và MH . Chứng minh:

5. $BHKC$ và $AMEI$ là các tứ giác nội tiếp.

6. $AK.AC = AM^2$.

7. $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

8. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

1. Chứng minh tứ giác $BHKC$ và $AMEI$ là tứ giác nội tiếp

$\widehat{AMB} = \widehat{KCB} = 90^\circ$ (2 góc nội tiếp

chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $BHKC$ có:

$$\widehat{KHB} + \widehat{KCB} = 180^\circ$$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

\Rightarrow Tứ giác $BHKC$

Tứ giác $AMEI$ có:

$$\widehat{AMB} + \widehat{EIA} = 180^\circ$$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

\Rightarrow Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

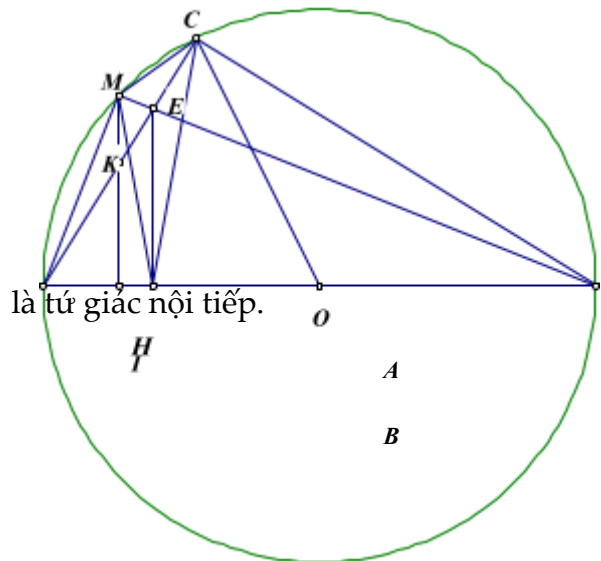
2. Xét ΔAHK và ΔACB có:

$$\widehat{AHK} = \widehat{ACK} = 90^\circ$$

\widehat{CAB} chung

$\Rightarrow \Delta AHK \sim \Delta ACB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AK} = \frac{AC}{AB}$$



là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow AH \cdot AB = AC \cdot AK \quad (1)$$

$AC \perp AB$

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔAMB vuông tại M , có MH là đường cao, ta có:

$$AH \cdot AB = AM^2$$

(2)

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow AK \cdot AC = AM^2$ (Đpcm)

3. Xét ΔAEI và ΔABC có:

$$\widehat{AIE} = \widehat{ACB} = 90^\circ$$

\widehat{CAE} chung

$\Rightarrow \Delta AEI \sim \Delta ABC$ (g.g)

$AI \quad AC$

Xét $\triangle BEI$ và $\triangle BAM$ có:

$$\widehat{BIE} = \widehat{BMA} = 90^\circ$$

\widehat{ABM} chung

$\Rightarrow \triangle BEI \sim \triangle BAM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BI}{BM} \Rightarrow BE \cdot BM = BI \cdot BA \quad (4)$$

$BI \quad BM$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AB(AI + BI)$

$$\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AB^2 = 4R^2$$

Vậy $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào M .

4. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

Tứ giác $BCEI$ có:

$$\widehat{BCE} + \widehat{EIB} = 90^\circ$$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

\Rightarrow tứ giác $BCEI$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{EIC} = \widehat{IBC} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EC).}$$

Từ câu 1, ta có tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{EIM} = \widehat{EAM} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung ME).}$$

Mà $\widehat{IBC} = \widehat{EAM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$$\widehat{MIE} = \widehat{EIC} + \widehat{EIM} = 2\widehat{EAM} = \widehat{MOC} \text{ mà 2 đỉnh cùng nhìn cạnh MC}$$

\widehat{MOC}

$\Rightarrow M, C, I, O$ thuộc cùng 1 đường tròn

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định O và C .

Câu 33. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng $d \perp OA$ tại A . Trên d lấy điểm M . Qua M kẻ 2 tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn (O) . Nối EF cắt OM tại H , cắt OA tại B .

5. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.
6. Chứng minh $OA \cdot OB = OH \cdot OM = R^2$.
7. Chứng minh tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MEF thuộc một đường tròn cố định khi M di chuyển trên d .
8. Tìm vị trí của M để diện tích ΔHBO lớn nhất.

4. Vì $OB \cdot OA = R^2 \Rightarrow OA = \frac{R^2}{OB} \Rightarrow B$ cố định. R

$\widehat{OHB} = 90^\circ \Rightarrow H \in$ đường tròn đường kính OB .

Gọi K là trung điểm $OB \Rightarrow KB = KO = HK$.

Hạ $HN \perp OB$

$S_{HBO} \max \Leftrightarrow HN \max$. Mà $HN \leq HK$. Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K$.

Vậy $S \max \Leftrightarrow \Delta HBO$ vuông cân tại $H \Leftrightarrow MO$ tạo với OA một góc 45° .

Câu 34. Cho $(O; R)$ và điểm A thuộc đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm H sao cho $AH < R$. Dựng đường tròn tại H . Đường thẳng d cắt đường tròn tại E và B (E nằm giữa H và B).

2. Chứng minh $\Delta ABH \sim \Delta EAH$.

4. Lấy điểm C thuộc Ax sao cho H là trung điểm AC . Nối CE cắt AB tại K . Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

5. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

Giải :

1. Chứng minh $\Delta AHB \neq \Delta EAH$

Ta có: Các bài tập hình học 9 Website: webtoan.com $\widehat{AH} = \widehat{AE}$ (t/c góc tạo bởi tia tiếp tuyến và

Giải:

- Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.

M là phân giác của $\angle EMF$ nên $\widehat{ME} = \widehat{MF}$ (góc nội tiếp chắn cung EF).
 Mà $\widehat{MA} = \widehat{OA} = \widehat{MABH}$ là tứ giác

$$M \in OB, OA \perp OH, OM$$

$$\square EMO \text{ vuông tại } E \Rightarrow OH \cdot OM = OE^2 = R^2.$$

- Có $I \in MO$; EI là phân giác $\angle MEH$.

$$\text{Mà } \angle MEI = \angle IEO = 90^\circ$$

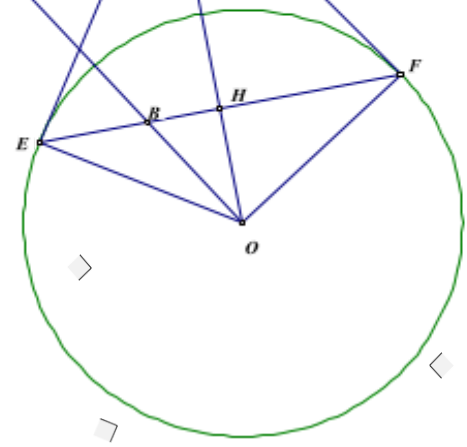
$$\angle IEH = \angle OIE = 90^\circ \Rightarrow O \in IE \perp I \in EO$$

$$\square OIE \text{ cân tại } O \Rightarrow OI = OE = R \Rightarrow I \in (O; R).$$

dây cung)

2 A

\widehat{AE}



BE

(cm)

\widehat{AHB} chung

$\triangle EAH$ (g.g).

x

$\Rightarrow \triangle AHB \#$

2. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp

$\{ EH \perp AC \}$

Ta có: $AH = HC \} \Rightarrow \triangle EAC$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{ECA} \Rightarrow \widehat{KCA} = \widehat{ABH}$

Mà $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{KCA} + \widehat{BAH} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CKA} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AHEK$ có:

$\widehat{AKE} + \widehat{EHA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà 2 góc này ở vị trí đối diện

$\Rightarrow AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

3. Tìm vị trí của H trên AB

Ax sao cho

$\sqrt{\quad}$
 $AB = R \sqrt{3}$

$\sqrt{\quad}$
Kẻ $OI \perp AB$ tại I

$\Rightarrow AI = IB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos \widehat{OAI} =$

$\frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} \Rightarrow \widehat{OAI} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$

$2\sqrt{\quad}$

$\Rightarrow AH = AB \cdot \cos 60^\circ = R$

$\frac{3 \cdot 1}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{\quad}$

Vậy cần lấy điểm H trên

Ax sao cho $AH =$

thì $AB = R \cdot 3$.

Câu 35. Cho ΔABC vuông ở A . Trên cạnh AC dựng đường tròn tâm (O) có lấy 1 điểm M ,

đường kính MC . Đường thẳng BM cắt đường thẳng AD cắt

đường tròn tâm (O) tại D ,

đường tròn tâm (O) tại S

4. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và CA là tia phân giác của góc \widehat{BSC} .

BA, EM, CD đồng quy.

6. Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE .

Giải:

1. Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (giả thiết)

$\widehat{MDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

A, D nhìn BC dưới góc 90° nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB).

(1) Ta có tứ giác $DMCS$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACS}$

(cùng bù với \widehat{MDS}). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{ACS} \Rightarrow CA$

là phân giác

2. Giả sử BA cắt CD tại K . Ta có

$$BD \perp CK, CA \perp BK.$$

$\Rightarrow M$ là trực tâm ΔKBC . Mặt khác $\widehat{MEC} = 90^\circ$
(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow K, M, E$ thẳng hàng hay BA, EM, CD đồng
quy tại K .

3. Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$

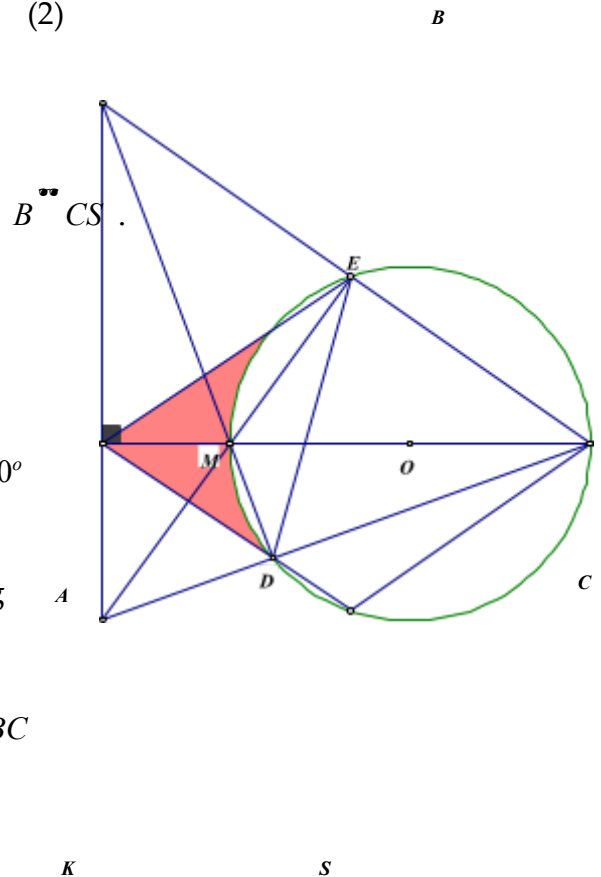
(cùng chắn cung DC). (3)

Mặt khác tứ giác $BAME$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MBE}$ (cùng chắn cung ME). (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{MAE}$ hay AM là tia phân giác của \widehat{DAE} .

Chứng minh tương tự ta



có: $\widehat{ADM} = \widehat{MDE}$ hay DM là tia phân giác \widehat{ADE} .

Vậy M là tâm đường tròn

nội tiếp $\triangle ADE$.

5. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O) . Chứng minh các đường thẳng

* **Lưu ý:** Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy, một phương pháp thường dùng là chứng minh ba đường thẳng ấy hoặc là ba đường cao, hoặc là ba đường trung tuyến, hoặc là ba đường phân giác của một tam giác.

Câu 36. Cho đường

OA .

Kẻ dây CD

tròn $(O; R)$, đường kính

AB . Điểm H thuộc đoạn

AB tại H . Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AH và đường tròn (O_2) đường

thẳng MN cắt đường tròn (O) tại E và F.

5. Chứng minh CMHN là hình chữ nhật.

6. Cho $AH = 4 \text{ cm}, BH = 9 \text{ cm}$. Tính MN .

7. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2) .

8. Chứng minh $CE = CF = CH$.

Giải:

1. Chứng minh CMHN

là hình chữ nhật:

Ta có: $\widehat{AMH} = \widehat{ACB} = \widehat{HNB} = 90^\circ$

(các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{CMH} = \widehat{CNH} = 90^\circ$$

$\Rightarrow CMHN$ là hình chữ nhật.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB:

$$CH^2 = AH \cdot HB = 4 \cdot 9 = 36$$

Suy ra $CH = 6 \Rightarrow MN = 6 \text{ (cm)}$.

3. Gọi I là giao điểm của CH và MN.

Theo tính chất hình chữ nhật:

$$IM = IN = IC = IH \Rightarrow \Delta IMH \text{ cân tại I}$$

$$\Rightarrow \widehat{IMH} = \widehat{IHM}$$

Lại có: $O_2M = O_2H \Rightarrow \widehat{O_2MH} = \widehat{O_2HM}$

$$\Rightarrow \widehat{O_1MI} = \widehat{O_1HI} = 90^\circ.$$

Chứng minh tương tự: $\widehat{O_1NI} = 90^\circ$

Do đó MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) .

4. OC cắt MN tại K , cắt $(O; R)$ tại $Q \Rightarrow \widehat{C'DQ} = \widehat{C'FQ} = 90^\circ$.

Có $OC = OB = R \Rightarrow \widehat{O'CB} = \widehat{O'BC}$

Mà $O_2M = O_2B = R_2 \Rightarrow \widehat{O'MB} = \widehat{O'BN} \Rightarrow \widehat{O'MB} = \widehat{O'CB}$

$\Rightarrow O_2M // OC \Rightarrow OC \perp MN$ tại K .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác (1)

vuông FCQ : $CF^2 = CK.CQ$

$$\text{Mà } OH \perp CD \Rightarrow HC = HD \quad (3)$$

$$\text{Do đó } CI \cdot CD = CH \cdot 2CH = CH^2$$

2

$$\text{Từ (1); (2) và (3) } \Rightarrow CF^2 = CH^2 \Rightarrow CF = CH$$

$$\text{Có } OK \perp EF \Rightarrow KE = KF \Rightarrow \Delta CEF \text{ cân tại } C \Rightarrow CE = CF.$$

$$\text{Vậy } CE = CF = CH.$$

Câu 37. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính vuông góc AB và CD . Gọi I là trung

điểm của
 K .

OB . Tia CI cắt đường tròn $(O; R)$ tại E . Nối AE cắt CD tại H ; nối BD cắt AE tại

5. Chứng minh tứ giác $OIED$ nội tiếp.

6. Chứng minh $AH \cdot AE = 2R^2$.

7. Tính $\tan \widehat{BAE}$.

8. Chứng minh OK vuông góc với BD .

Giải:

1. Ta có CD là đường kính của đường tròn $(O; R)$ nên $\widehat{CED} = 90^\circ$

Theo giả thiết $\widehat{BOD} = 90^\circ$

Do đó: $\widehat{CED} + \widehat{BOD} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $OIED$ là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta AOH \sim \Delta AEB$ (g.g)

$$\Rightarrow AO = AH \cdot AE \cdot AB$$

Các bài tập hình học

học ở

Có $\square CKI \# \square CDQ$ (g.g) $\square CK.CQ \square CI.CD$

3. Ta có:

$$\overset{1}{A''}EC = \overset{1}{A''}OC = 45^\circ$$

2

Suy ra EI là phân giác

$$\text{Do đó } \Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{IB}{IA} = 1$$

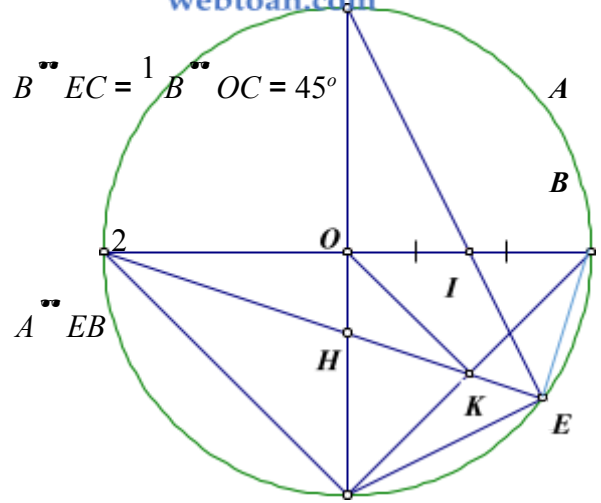
$$\frac{EA}{EA} = \frac{IA}{IA} = 3$$

$$\frac{4E}{4E} = 3$$

$$\Rightarrow AE \cdot AH = AO \cdot AB = 2R^2$$

Website:

webtoan.com



$$\text{Vậy } \tan \overset{1}{B''}AE = \frac{BE}{EA} = 1$$



uông tại O , ta có $\angle OH \perp OA, \tan \angle OAH = \frac{OA}{OH} = \frac{OD}{OH}$ vì vậy H là trọng tâm

3

tam giác DAB .

Do đó AK là đường trung tuyến của tam giác DAB .

Suy ra $KB = KD$. Vì vậy $OK \perp DB$ (quan hệ đường kính – dây cung).

Câu 38. Cho đường tròn tâm O , bán kính R , đường kính AD . Điểm H thuộc đoạn OD .

Kẻ dây $BC \perp AD$ tại H . Lấy điểm M thuộc cung nhỏ AC , kẻ $CK \perp AM$

BM cắt CK tại N .

5. Chứng minh $AH \cdot AD = AB^2$.

6. Chứng minh tam giác CAN cân tại A .

7. Giả sử H là trung điểm của OD . Tính R theo thể tích hình nón có bán kính đáy là HD , đường cao BH .

8. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

Giải:

1. Tam giác ABD vuông tại B , $BH \perp AD$

nên $AH \cdot AD = AB^2$.

2. Do $AH \perp BC \Rightarrow HB = HC \Rightarrow \Delta ABC$

cân tại A do đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

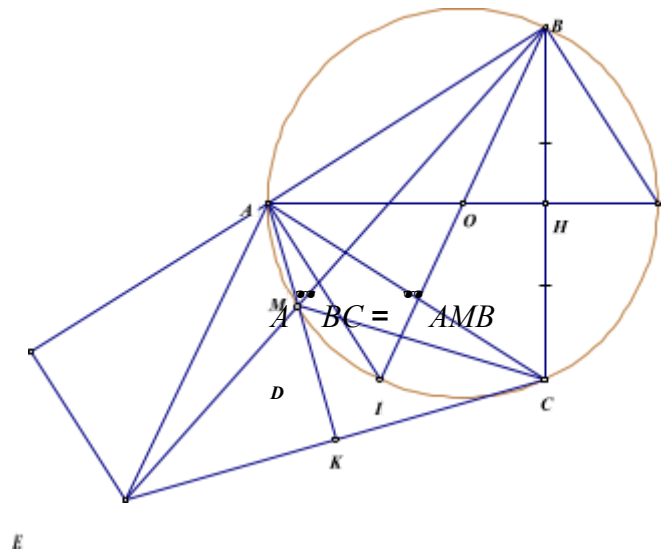
► Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$ nên

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{KMN} \quad (1)$$

Tứ giác $ABCM$ nội tiếp đường tròn (O ;

R) nên $\widehat{ABC} = \widehat{KMC}$ (cùng bù với

\widehat{AMC}) (2)



Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overline{KM} = \overline{KN}$.

N

Lại có $MK \perp CN$ (giả thiết) $\Rightarrow \triangle MCN$ cân

tại $M \Rightarrow KC = KN$.

Tam giác CAN có $AK \perp CN$ và $KC = KN$ nên $\triangle ACN$ cân tại A .

3. Khi $OH = HD$, tam giác BOD cân tại $B \Rightarrow BO = BD$, mà $OB = OD = R$ nên tam giác OBD

√

đều $\Rightarrow \widehat{BOH} = 60^\circ \Rightarrow BH = OB \cdot \sin 60^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$r \perp h$

Trong đó: $r = HD = R$, $h = BH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} R^3$$

lớn nhất khi NE lớn nhất.

4. Hạ $NE \perp AB$. Vì AB

không đổi nên Ta có: $AN = AC$ không đổi.

Mà $NE \leq NA$, dấu $E \equiv A$.

bằng xảy ra khi

$\widehat{NAB} = 90^\circ$ do đó NA đi qua I .

Lấy I đối xứng với B qua O . Khi $E \equiv A$ thì

Mặt khác AM là phân giác \widehat{NAC} của

nên M là điểm chính giữa của cung nhỏ IC .

Vậy điểm M cần tìm là điểm chính giữa cung nhỏ IC .

Câu 39. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC . Điểm A thuộc nửa đường tròn

($AC \leq AB$). Dựng về phía ngoài ΔABC một hình vuông $ACED$. Tia EA cắt nửa đường tròn tại F . Nối BF cắt ED tại K .

5. Chứng minh rằng 4 điểm B, C, D, K thuộc một đường tròn.

6. Chứng minh $AB = EK$.

7. Cho

$\widehat{ABC} = 30^\circ; BC = 10cm$. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây AC và

cung nhỏ AC .

8. Tìm vị trí điểm A để chu vi tam giác ΔABC lớn nhất.

Giải:

1. $ACED$ là hình vuông

$$\Rightarrow \overset{\frown}{C} AE = \overset{\frown}{C} DE = 45^\circ$$

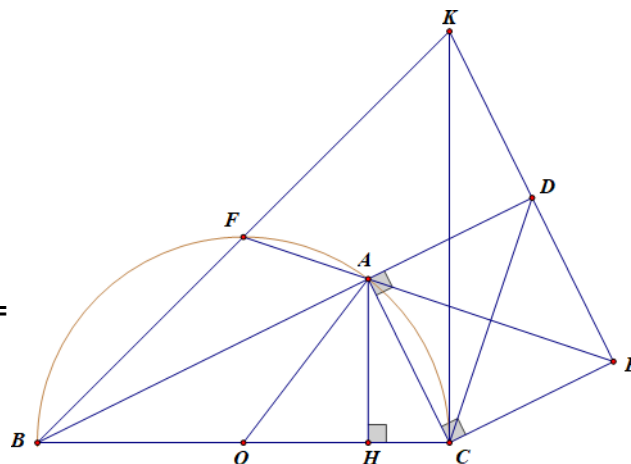
Tứ giác $BCAF$ nội tiếp đường tròn

$$(O) \Rightarrow \overset{\frown}{F} BC = \overset{\frown}{C} AE$$

(cùng bù với góc $\overset{\frown}{C} AF$)

$$\Rightarrow \overset{\frown}{F} BC = \overset{\frown}{C} DE \Rightarrow \overset{\frown}{F} BC + \overset{\frown}{C} DK =$$

$$\Rightarrow BCDK$$



2. Có:

$$\overset{\frown}{B} AC = 90^\circ = \overset{\frown}{C} EK .$$

Mà tứ giác $BCDK$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \overset{\frown}{A} BC = \overset{\frown}{C} KD \Rightarrow \overset{\frown}{A} CB = \overset{\frown}{E} CK.$$

Lại có: $AC = CE$ (cạnh hình vuông)

l $\square EKC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) $\square AB \square EK$

30° nên $A \square OC \square 60^\circ$, do đó tam giác OAC là tam

giác đều.

$\sqrt{\quad}$
 Kẻ $AH \perp BC$, ta có $AH = OA \cdot \sin 60^\circ = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2}$

Gọi diện tích hình viên phân là S , ta có: $S = S_{\text{quạt } AOC} - S_{AOC}$

$$S = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AH$$

$\sqrt{\quad}$
 $= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3})$

$\sqrt{\quad}$
 $\frac{R^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3}) = 12 \text{ (cm)}.$

4. Chu vi $\triangle ABC$ lớn nhất $\Leftrightarrow AB + AC$ lớn nhất. Áp dụng BĐT $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

Ta có: $(AB + AC)^2 \leq 2(AB^2 + AC^2) = 2BC^2 = 8R^2 \Rightarrow AB + AC \leq 2\sqrt{2}R$

Dấu "=" xảy ra khi $AB = AC \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính BC .

Câu 40. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại A . Lấy M thuộc Ax , kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn tại B (B khác A). Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt AB tại D . Nối OM cắt AB tại I , cắt cung nhỏ AB tại E .

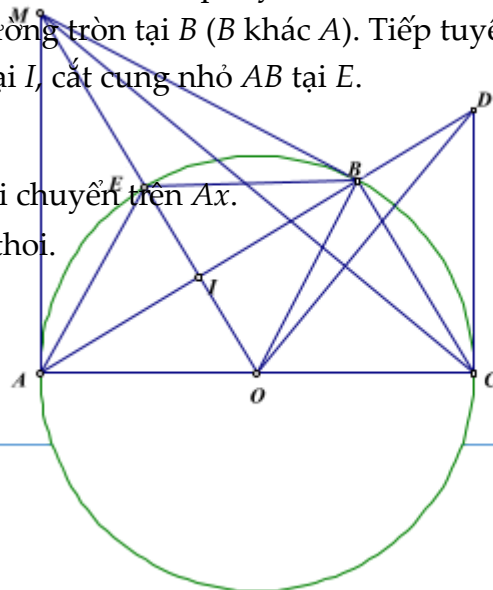
1. Chứng minh $OIDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh tích $AB \cdot AD$ không đổi khi M di chuyển trên Ax .

3. Tìm vị trí điểm M trên Ax để $AOBE$ là hình thoi.

4. Chứng minh $OD \perp MC \square 60^\circ$

Giải: $AM \square OA \cdot \tan 60^\circ \square R$
 $\square OM$ vuông tại A nên



1. Có $MA = MB; OA = OB = R$ nên OM là trung trực của AB nên $OI \perp AB$ và $IA = IB$

Lại có $OC \perp CD$ nên $\widehat{OID} + \widehat{OCD} = 180^\circ \Rightarrow O IDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có $\widehat{A'BC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa

√

Các bài tập
hình học 9

4. $\widehat{AMO} = \widehat{BAC}$ (cùng phụ với \widehat{MAB}), $\widehat{MAO} = \widehat{OCD} = 90^\circ$

Nên $\triangle AMO \cong \triangle CAD$ (g.g) $\Rightarrow AM = AO$

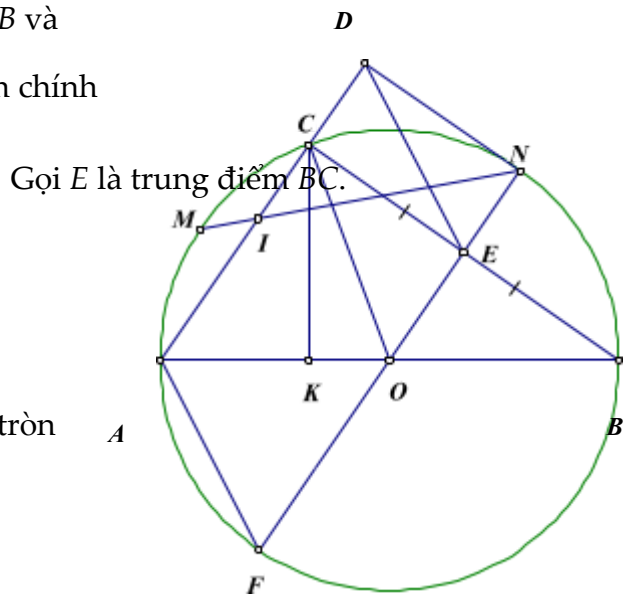
Mà $OA = OC = R$, suy ra $\frac{AM}{OC} = \frac{AO}{CD} \Rightarrow \tan \widehat{MCA} = \tan \widehat{ODC}$

$\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{ODC} \Rightarrow \widehat{ODC} + \widehat{MCD} = 90^\circ$. Do đó $OD \perp MC$.

Câu 41. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M và N là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC . Nối MN cắt AC tại I . Hạ $ND \perp AC$.

Dựng hình bình hành $ADEF$.

- Tính \widehat{MIC} .
- Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.



Gọi E là trung điểm BC .

- Chứng minh rằng F thuộc đường tròn $(O; R)$.

- Cho $\widehat{CAB} = 30^\circ; R = 30\text{cm}$.

Tính thể tích hình

tạo thành khi cho $\triangle ABC$ quay một vòng quanh

AB .

Giải:

$$1. \quad \widehat{MIA} = \frac{1}{2} (\widehat{MA} + \widehat{CN}) = \frac{1}{2} \widehat{AB} \\ = 45^\circ \Rightarrow \widehat{MIC} = 135^\circ$$

2. Có: $\widehat{NC} = \widehat{NB} \Rightarrow ON \perp BC$ tại E .

Lại có: $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCE} = 90^\circ$.

Mà $ND \perp CD$ (gt) $\Rightarrow CEND$ là hình chữ nhật


$\Rightarrow DN \perp ON$ tại $N \Rightarrow DN$ là tiếp tuyến của (O) .

3. Theo tính chất hình chữ nhật ta có: $\widehat{EDC} = \widehat{NCD}$

Mà $\widehat{EDC} = \widehat{FNC} \Rightarrow \widehat{FNC} = \widehat{NCD} \Rightarrow \widehat{FNC} + \widehat{NCD} = 180^\circ$. $ON \parallel AC$ (cùng $\perp CB$)

$\Rightarrow N, E, O, F$ thẳng hàng. Suy ra $ACNF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow F \in (O)$

4. Hạ $CK \perp AB$. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{C} = 90^\circ$ nên $\widehat{B} = 60^\circ$



$$\text{tam giác đều} \Rightarrow BK = KO = \frac{R}{2}; BC = R; CK = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

nón đỉnh B cùng có tâm hình tròn đáy là K, bán kính CK.

Gọi thể tích tạo thành là V, ta có:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} \pi \cdot CK^2 \cdot AK + \frac{1}{3} \pi \cdot CK^2 \cdot BK = \frac{1}{3} \pi \cdot CK^2 (AK + BK) \\
 &= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3R^2}{500} (cm) = \frac{\pi R^3}{3}
 \end{aligned}$$

Câu 42. Cho đường tròn (O; R) với dây AB cố định. Gọi I là điểm chính giữa cung lớn AB. Điểm M thuộc cung nhỏ IB. Hạ AH ⊥ IM; AH cắt BM tại C.

- Chứng minh ΔIAB và ΔMAC là tam giác cân.
- Chứng minh C thuộc một đường tròn cố định khi M chuyển động trên cung nhỏ IB.
- Tìm vị trí của M để chu vi ΔMAC lớn nhất.

Giải:

1. Vì I''A = I''B ⇒ IA = IB ⇒ ΔIAB cân tại I.

□ IC □ IA không đổi □ C thuộc đường tròn (I; R) (cùng bù với

3. Chu vi □MAC □ MA □ MC □ AC □ 2(MA □ AH)

Có H □ MA □ I □ BA (không đổi và

I □ BA □ 90°) Đặt H □ MA □ I □ AB □ □ .

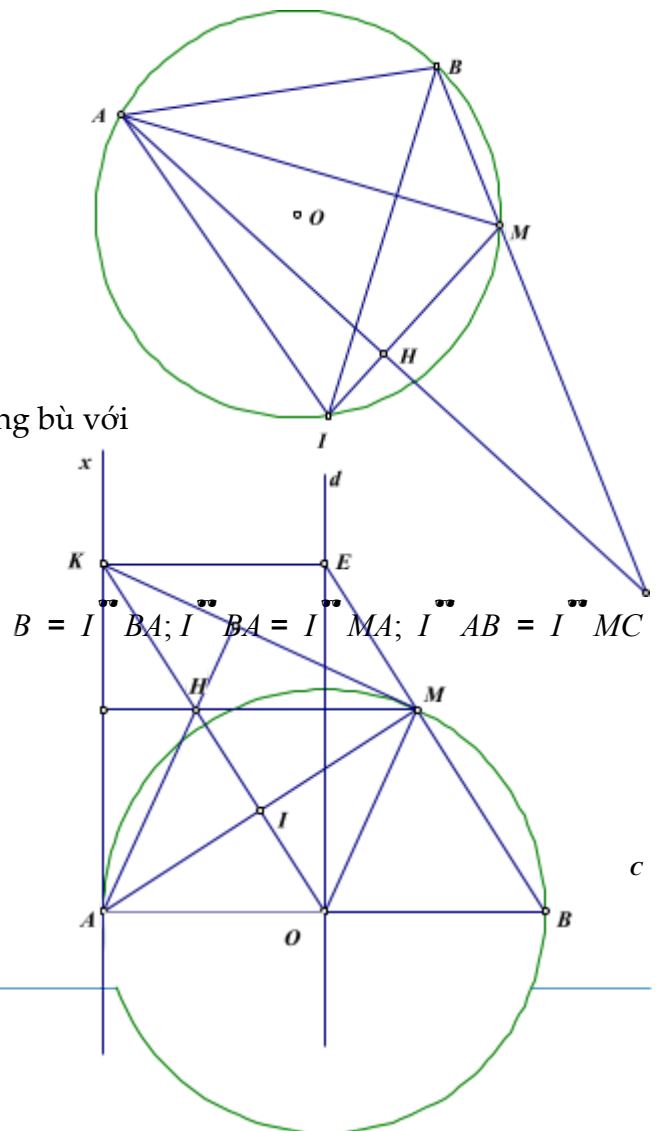
Ta có: AH □ MA.sin□ Vậy chu vi □MAC □ 2MA(1 □ sin□)

Chu vi □MAC lớn nhất khi MA lớn nhất □ A, O, Lại có: MH ⊥ AC ⇒ ΔMAC cân tại M.

Câu 43. Cho đường tròn □O; R□ đường kính

AB. Kẻ

tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm



cắt MB tại E .

5. Chứng minh $KAOM$ là tứ giác nội tiếp;

6. OK cắt AM tại I . Chứng minh $OI \cdot OK$ không đổi khi K chuyển động trên Ax ;

7. Chứng minh $KAOE$ là hình chữ nhật;

8. Gọi H là trực tâm của ΔKMA .
thuộc một đường tròn cố định.

Chứng minh rằng khi K chuyển động trên Ax thì H

Giải:

1. $\widehat{KAO} = \widehat{KMO} = 90^\circ \Rightarrow KAOM$ nội tiếp.

2. Theo tính chất tiếp tuyến:

$$KA = KM$$

KO là phân giác của

$$\widehat{AKM} \Rightarrow KO \perp AM \text{ tại } I$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác vuông AOK ta có

$$OI \cdot OK = OA^2 = R^2$$

3. Có OK

$$\parallel BM \text{ (cùng } \perp AM) \Rightarrow \widehat{KOA} = \widehat{EOB}.$$

Mà $OA = OB = R$; $\widehat{KAO} = \widehat{EOB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \Delta AKO = \Delta OEB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AK = OE, \text{ mà } AK$$

$$\parallel OE, \widehat{KAO} = 90^\circ$$

$\Rightarrow AKEO$ là hình chữ nhật.

4. H là trực tâm của $\Delta KMA \Rightarrow AH \perp KM, MH \perp KA \Rightarrow AH \parallel OM, MH \parallel OA$.

Do đó $AOMH$ là hình bình hành $\Rightarrow AH = OM$

$= R$. Vậy H thuộc đường tròn $(A; R)$.

Gọi C là trung điểm của OA . Đây

Câu 44. Cho đường tròn (O) đường kính AB

$= 2R$.

Trên cung MB nhỏ lấy điểm K . Nối AK cắt NM tại H .

ác bài tập hình

Website:

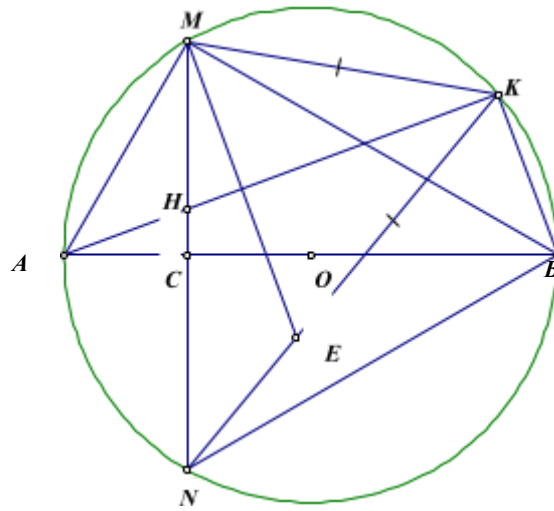
là tứ giác nội tiếp.

Qua K kẻ tiếp tuyến KM với đường tròn (O) . Đường thẳng $d \perp AB$ tại I tích $AH \cdot AK$ không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ MB .

7. Chứng minh $\triangle BMN$ là tam giác đều.
8. Tìm vị trí điểm K để tổng $KM + KN + KB$ lớn nhất.

Giải:

| 90° ; $M \perp CB \perp 90^\circ \perp H \perp CB \perp H \perp KB \perp 180^\circ$ nên tứ giác $BCHK$ là tứ



2. $\Delta ACH \#$

$$\Delta AKB(g.g) \Rightarrow \frac{AC}{AK} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH \cdot AK = AB \cdot AC = R^2$$

$$\frac{AK}{AB}$$

3. Vì $OC \perp MN \Rightarrow CM = CN \Rightarrow \Delta BMN$ cân tại B .

$$\Delta MAB \text{ vuông tại } M \Rightarrow AM^2 = AC \cdot AB = R^2$$

$$\Rightarrow AM = R. \text{ Do đó } \sin \widehat{MBA} = \frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \widehat{MBA} = 30^\circ$$

$$\frac{MB}{2}$$

$$\text{Mà } \widehat{MCB} = \widehat{NCB} \text{ (tính chất tam giác cân)} \Rightarrow \widehat{MNB} = 60^\circ$$

Do đó ΔMNB là tam giác đều.

4. Trên KN lấy E sao cho $KE = KM$

$$\text{Vì tam giác } BMN \text{ đều nên } \widehat{MBN} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MKN} = 60^\circ \Rightarrow \Delta KME \text{ đều.}$$

$$\text{Do đó } ME = MK \text{ và } \widehat{KME} = 60^\circ.$$

$$\text{Lại có: } MB = MN \text{ và } \widehat{KMB} = \widehat{EMN} \quad (\widehat{BME} = 60^\circ)$$

(cùng cộng với

$$\Rightarrow \Delta KMB = \Delta EMN (c.g.c) \Rightarrow KB = EN.$$

Từ đó $KM + KB = KN \Rightarrow S = KM + KN + KB = 2KN$

S lớn nhất $\Leftrightarrow KN$ lớn nhất $\Leftrightarrow K, O, N$ thẳng hàng.

Câu 45. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A ở ngoài đường tròn. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến

AB, AC tới đường tròn (B và C là 2 tiếp điểm). I là một điểm thuộc đoạn BC ($IB < IC$).

Kẻ đường

thẳng $d \perp OI$ tại I . Đường thẳng d cắt AB, AC

lần lượt tại E và F .

5. Chứng minh $OIBE$ và $OIFC$ là tứ giác nội tiếp.

I là trung điểm EF .

- K là một điểm trên cung nhỏ BC . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại K cắt AB ; AC tại M và N . Tính chu vi ΔAMN nếu $OA = 2R$.

8. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB , AC tại P và Q . Tìm vị trí của A để S_{APQ} nhỏ nhất.

Giải:

1. Có $OB \perp AB$, $OC \perp AC$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow \widehat{OIE} = \widehat{OBE} = 90^\circ \Rightarrow OIBE \text{ nội tiếp}$$

$$\widehat{OIF} + \widehat{OCF} = 180^\circ \Rightarrow OIFC \text{ nội tiếp.}$$

2. Tứ giác $OIBE$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OBI}. \text{ Tương tự}$$

$$\widehat{OFI} = \widehat{OCI}. \text{ Mà } OB = OC = R$$

$$\Rightarrow \widehat{OBI} = \widehat{OCI} \Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OFI}$$

$$\Rightarrow \Delta OEF \text{ cân tại } O. \text{ Mà } OI \perp EF \Rightarrow IE = IF \quad (\text{Đpcm})$$

3. Có $MK = MB$, $NK = NC$

$$\text{Suy ra chu vi } \Delta AMN = AC + AB = 2AC = 2$$

$$\sqrt{\frac{AO^2}{OC^2}} = 2 = 2R$$

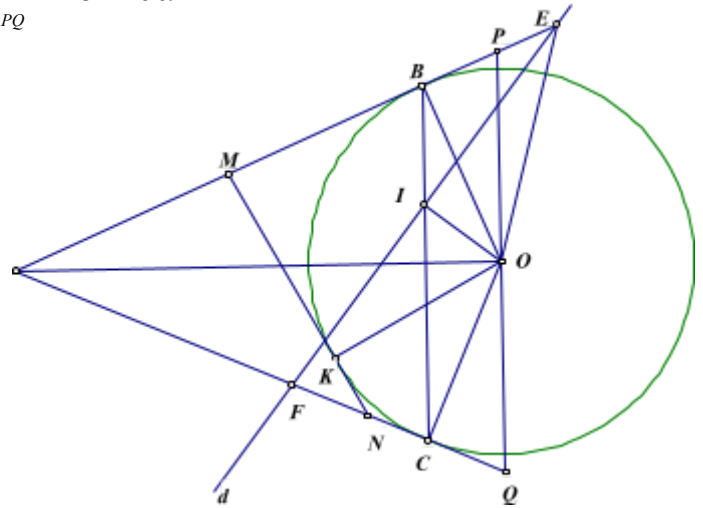
4. Có AO là phân giác của \widehat{PAQ} , $PQ \perp AO \Rightarrow \Delta APQ$ cân tại $A \Rightarrow S_{APQ} = 2S_{AOQ}$

$$S_{APQ} = AQ \cdot OC \text{ mà } OC = R \quad S_{APQ} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AQ \text{ nhỏ nhất.}$$

không đổi, do đó

$$\Delta OAQ \text{ vuông tại } O \Rightarrow$$

$$AC \cdot CQ = OC^2 = R^2.$$



√

Mà $\frac{AC}{CQ} = \dots$ dấu "=" xảy ra khi $AC = CQ$

$$S_{APQ} \min \Leftrightarrow AC = CQ \Leftrightarrow \Delta OQA \text{ vuông cân tại } O \Leftrightarrow \angle A = 45^\circ \Leftrightarrow OA = R$$

Câu 46. Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt. Đường thẳng

OA cắt $(O); (O')$ lần lượt tại điểm thứ hai C, D .
 Đường thẳng $O'A$ cắt $(O); (O')$ lần lượt

tại điểm thứ hai E, F .

4. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I .

2. Do

$$\widehat{EF} = \widehat{BF} = 90^\circ$$

suy ra $BEIF$ nội tiếp

đường tròn.

3. Gọi H là giao điểm của AB và PQ

Ta chứng minh được $\triangle AHP \sim \triangle PHB \Rightarrow \frac{HP}{HB} = \frac{HA}{HP} \Rightarrow HP^2 = HA \cdot HB$

Tương tự,

$$\frac{HQ}{HB} = \frac{HP}{HQ} \Rightarrow HQ^2 = HA \cdot HB$$

Vậy $HP = HQ$ hay H là trung điểm của PQ .

Câu 47. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B .

Kẻ tiếp

tuyến chung DE của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$ sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A .

tuyến chung DE của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$ sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A .

4. Chứng minh rằng $\widehat{D} = \widehat{AB} = \widehat{B} = \widehat{DE}$.

Các bài tập hình

Website:

học 9

webtoan.com

5. Tia AB cắt DE tại M . Chứng minh M là trung điểm của DE .

tứ giác $BEIF$ nội tiếp được
g EB cắt đường thẳng DB cắt AE tại

Q . Chứng minh rằng PQ

đường tròn.

đường thẳng AB đi qua trung

điểm của đoạn thẳng PQ .

đường thẳng AB đi qua trung
điểm của đoạn thẳng PQ .

Giải:

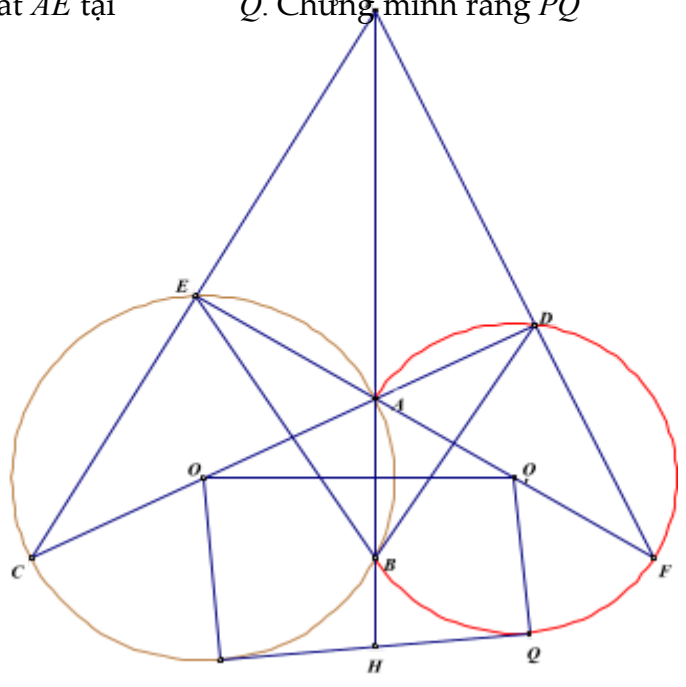
1. Ta có: $\widehat{A} + \widehat{BC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn
nửa

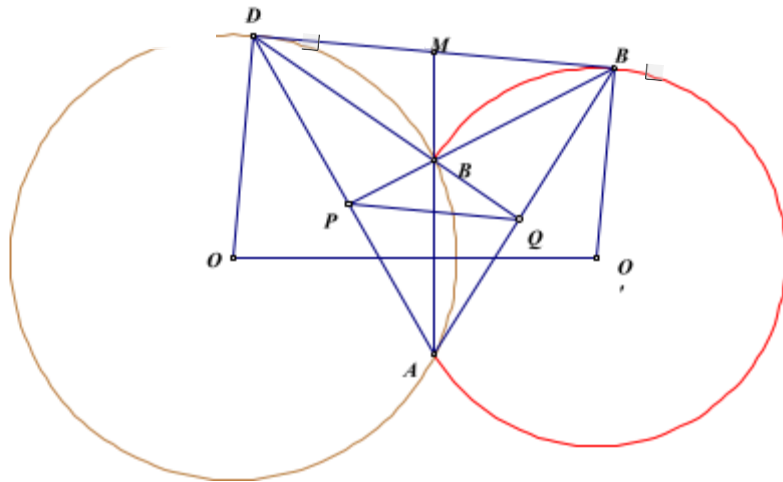
$\widehat{A} + \widehat{BF} = 90^\circ$ (góc nội
ch nửa
đường

Nên B, C, F thẳng hàng.

Có AB, CE và DF là 3 đường cao của
 $\triangle ACF$

nên chúng đồng quy.





1. Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{DAB}$ (1) \widehat{DAB} (góc nội tiếp)

$\widehat{BDE} = 2 \widehat{DAB}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung).
Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.

2. Xét $\triangle DMB$ và $\triangle AMD$ có:

\widehat{DMA} chung,
 $\widehat{DAM} = \widehat{BDM}$

Nên $\triangle DMB \sim \triangle AMD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MD}{MA} = \frac{MB}{MD} \quad \text{hay } MD^2 = MA \cdot MB.$$

Tương tự ta cũng có: $\triangle AME \sim \triangle MBE$ hay $ME^2 = MA \cdot MB$.

$\triangle EMB \sim \triangle EMB$ $\frac{MB}{ME} = \frac{ME}{MB}$

Từ đó: $MD = ME$ hay M là trung điểm của DE .

3. Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{DMB}$, $\widehat{EAB} = \widehat{EMB}$

$$\Rightarrow \widehat{PAQ} + \widehat{PBQ} = \widehat{DAB} + \widehat{EAB} + \widehat{PBQ} = \widehat{DMB} + \widehat{EMB} + \widehat{DBE} = 180^\circ$$

\Rightarrow Tứ giác $APBQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQB} = \widehat{PAB}$.

Kết hợp với $\widehat{PAB} = \widehat{BDM}$ suy ra $\widehat{PQB} = \widehat{BDM}$.

Hai góc này ở vị trí so le trong nên PQ song song với AB .

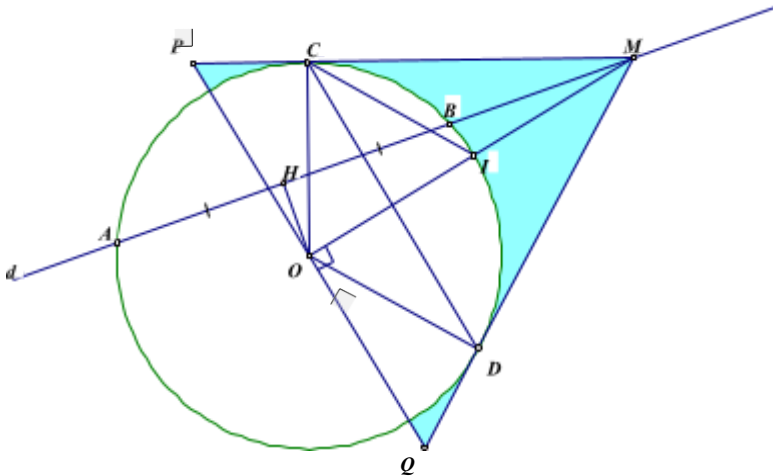
Câu 48. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B . Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB ;

rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

- Đoạn OM cắt đường tròn tại I . Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD .

6. Đường thẳng qua O , vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q . Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Giải:



1. Vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$ hay $\widehat{O}HM = 90^\circ$. Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có $OD \perp DM$ hay $\widehat{ODM} = 90^\circ$. Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2. Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $MC = MD \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M
 $\Rightarrow MI$ là một đường phân giác của \widehat{CMD} .

Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ $C \widehat{D}$ nên $\widehat{DCI} = \widehat{D I C} = \widehat{C I M} = \widehat{M C I}$

$\Rightarrow CI$ là phân giác của \widehat{MCD} . Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD .

3. Ta có ΔMPQ cân ở M , có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính:

$$S = 2S_{\triangle OQM}$$

$$= 2 \cdot \frac{OD \cdot QM}{2} = OD \cdot QM = R(MD + DQ)$$

Từ đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow MD + DQ$ nhỏ nhất. $DM \cdot DQ = OD^2 = R^2$

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có

không đổi nên $MD + DQ$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DM = DQ = R$.

$\sqrt{\quad}$ Khi đó $OM = R$ hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính R . \square

$\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Ba đường cao

$AD; BE; CF$ cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm BC , vẽ đường kính AK .

5. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

6. Chứng minh $DA \cdot DH = DB \cdot DC$.

7. Cho $\angle BAC = 60^\circ; S = 20\text{cm}^2$. Tính S_{ABC} .

hình

8. Cho BC cố định; A chuyển động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn.

Chứng minh điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải:

1. Vì B và C thuộc đường tròn đường kính

$$AK: \angle BAK = \angle CAK = 90^\circ$$

Do đó

$$BH \parallel CK$$

hình bình hành

Mà I là trung điểm BC nên I là trung điểm của HK

Suy ra H, I, K thẳng hàng.

2. Ta có

$$\angle HBD = \angle DAC \text{ (cùng phụ với } \angle HBC \text{)}$$

nên $\triangle DBH \sim \triangle DAC$ (g.g)

$$\frac{DB}{DA} = \frac{HD}{DC}$$

Suy ra

$$DB \cdot DC = DA \cdot DH$$

$$\frac{DB}{DA} = \frac{HD}{DC}$$

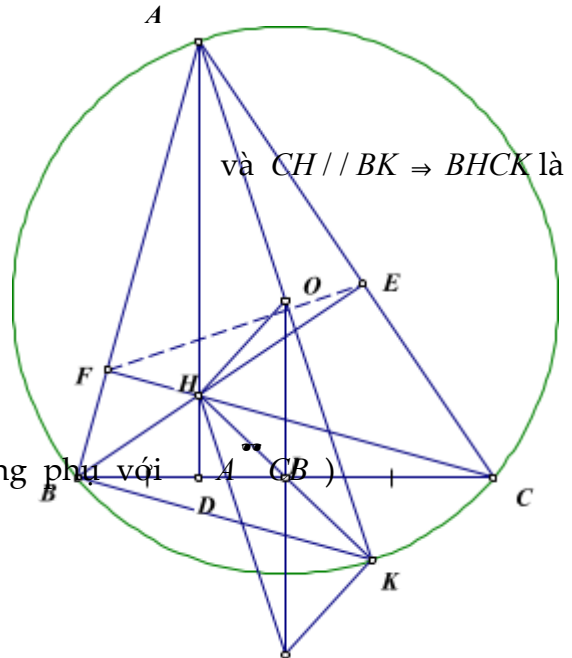
3. Vì $\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle AFC$ (g.g)

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$$

Suy ra $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$; $\angle BAC$ chung

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$$

o'



$$\Rightarrow \Delta AEF \# \Delta ABC \text{ (c.g.c)}$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} (AE)^2$$

Do đó $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AC)^2$$

Mà $AE = AC \cos B = AC \cos 60^\circ = \frac{1}{2} AC$

Suy ra $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 80 \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2$

Suy ra $S_{ABC} = 4 S_{AEF} = 4 \cdot 20 = 80 \text{ cm}^2$

$$S_{ABC} = 4 S_{AEF}$$

$$S_{ABC} = 4 S_{AEF}$$

4. Lấy O' đối xứng với O qua I suy ra O' cố định.

Ta có $IH = IK; OK = OA = R$ nên OI là đường trung bình của

ΔKHA

Do đó $OI \parallel AH$ và $OI = \frac{1}{2} AH$

Do đó $O'H \perp OA \perp R$ (không đổi)

Vậy H thuộc đường tròn $(O';R)$ cố định.

Câu 50. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính vuông góc là AB và CD . Lấy K thuộc cung nhỏ AC , kẻ $KH \perp AB$ tại H . Nối AC cắt HK tại I , tia BC cắt HK tại E ; nối AE cắt đường tròn $(O;R)$ tại F .

5. Chứng minh $BHFE$ là tứ giác nội tiếp.

6. Chứng minh $EC \cdot EB = EF \cdot EA$.

7. Cho H là trung điểm OA . Tính theo R diện tích ΔCEF .

8. Cho K di chuyển trên cung nhỏ AC . Chứng minh đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

1. Do F thuộc đường tròn đường kính AB nên

$$\angle AFB = 90^\circ$$

Suy ra $\angle FHE = \angle HFE = 90^\circ \Rightarrow BHFE$

là tứ giác nội tiếp.

2. Có nên

$$\angle ECA = \angle EFB = 90^\circ; \angle AEC$$

$$\Delta ECA \sim \Delta EFB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{EC}{EA} = \frac{EF}{EB} \Rightarrow EC \cdot EB = EA \cdot EF.$$

$$\frac{EF}{EB} = \frac{EC}{EA}$$

3. Từ chứng minh trên suy ra AC, BF, EH là 3

đường cao của ΔEAB nên chúng cắt nhau tại I .

Do đó $\frac{EC}{EA} = \frac{EF}{EB}$ và $\angle AEC = \angle FEB$

chung nên

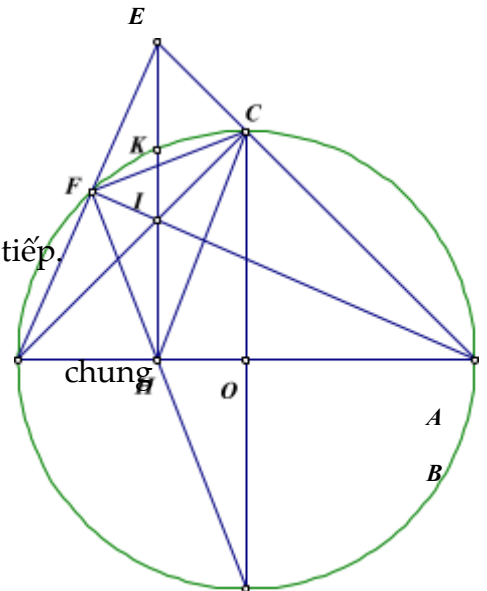
$$\Delta ECF \sim \Delta EAB$$

D

(cạnh – góc – cạnh)

$$S_{\Delta ECF} = \frac{1}{2} EC \cdot EF \cdot \sin \angle CEF$$

$$\frac{S_{\Delta ECF}}{S_{\Delta EAB}} = \left(\frac{EC}{EA} \right)^2 \cdot \frac{\sin \angle CEF}{\sin \angle AEB} \quad | \quad (1)$$



$$S_{EAB} (EA)$$

Vì $OB = OC = R$

nên ΔOBC vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC} = 45^\circ$.

Do đó ΔHBE vuông cân tại

$$H \Rightarrow EH = HB = \frac{3R}{2}$$

$$\frac{R}{2}$$

$$R^2 + 9R^2$$

$$\frac{\sqrt{10R^2}}{2}$$

Mà $AH = \frac{R}{2}$ nên $AE = \frac{3R}{2}$

$$= AH$$

$$+ HE$$

$$= \frac{R}{2} + \frac{3R}{2} = 2R$$

$$\Rightarrow AE = 2R$$

$$\frac{4}{2} + \frac{4}{2} = 4$$

$$HB^2 = HE^2 \Rightarrow \frac{9}{R^2} = \frac{BE^2}{R^2} \Rightarrow BE = 3\sqrt{2}$$

Lại có: $OC \parallel EH$

(cùng $\perp AB$) nên

$$EC = HO = 1 \Rightarrow EC = \frac{1}{2} EB = R$$

$\sqrt{\quad}$

$(EC)^2$

$$EB = HB = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{3R^2}{3R^2}$$

$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$

$$= 5 \Rightarrow S_{ECF} = 5 S_{EAB} = \frac{1}{2} \cdot EH \cdot AB = 10$$

(\quad)

4. Các tứ giác $BEFH$ và $AHCE$ nội tiếp nên

$$\angle AEB = \angle CHB; \angle AEB = \angle AHF \Rightarrow \angle AHF = \angle CHB$$

Suy ra

$$\angle AHF = \angle DHB$$

Có $HO \perp OC, OC = OD$ nên $\triangle HCD$

cân tại H nên

$$\angle AHF = \angle DHB$$

Do đó

$$\angle AHF = \angle DHB$$

$$\text{mà } \angle AHF + \angle FHB = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\angle DHB + \angle FHB = 180^\circ$$

Suy ra F, H, D thẳng hàng. Suy ra FH đi qua D cố định.