موضوع الاختبار رقم 16 لتحضير امتحان شهادة البكالوريا
شعبة الرياضيات

التمرين الأول (03 نقط)

أذكر إما صحة وإما خطأ ما يلي مع التبرير ، في حالة الخطأ يمكن إعطاء مثال مضاد :

1. من أجل كل عدد مركب z ، $Re(z^2) = [Re(z)]^2$.
2. من أجل كل عدد مركب z ،
إذا كان: $|1 + z - i z| = |i z|$ فان الجزء التخيلي لـ z معدوم .
3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O ; ,) .
من أجل كل عددين مركبين غير معدومين z و z' اللذين صورتيهما على الترتيب M و M' في المستوي المركب ، إذا كان : $|z - z'| = |z + z'|$ فان المستقيمين (OM) و (OM') متعامدان .

التمرين الثاني(04 نقط)

نعتبر ، في Z^2 ، المعادلة $18 - 4y = 84$ ..... (*)

1. أ. أثبت أنه اذا كان (x , y) حلا للمعادلة (*) ، فان $x \equiv 0 [2]$
ب. استنتج حلا خاصا للمعادلة (*) .
ج. حل المعادلة (*) ثم استنتج الحلول (x , y) التي تحقق : $x y > 0$
2. N عدد طبيعي يكتب $\alpha\beta\gamma$ في النظام ذي الأساس 5 ،
و يكتب $\overline{55\alpha\beta}$ في النظام ذي الأساس 7 .
عين الأعداد الطبيعية γ ، β ، α ثم اكتب N في النظام العشري .

التمرين الثالث(04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O ;,,;) .
ليكن (P_2) ، (P_1) المستويان ذا المعادلتين الديكارتيتين على الترتيب :
$x - 2y + 4z - 9 = 0$ ، $2x + y + z - 6 = 0$
1. بين أن (P_1) و (P_2) متعامدان .
2. نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .
بين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو : ($t \in R$) .
3. لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D). و لتكن A النقطة ذات الإحداثيات (- 9 ; - 4 ; - 1)
أ. تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (P_1) و لا إلى المستوي (P_2) .
ب. بين أن : $AM^2 = 14 t^2 - 14 t + 21$.
ج. لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f(t) = 2 t^2 - 2 t + 3$

- أدرس تغيرات الدالة f .
- من أجل أية نقطة M تكون المسافة AM أصغرية .

في كل ما يأتي ، نرمز بـ I للنقطة المذكورة سابقا .

4. ليكن (Q) المستوي العمودي على (D) و المار من النقطة A .
   أ. عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .
   ب. برهن أن النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

التمرين الرابع(05 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر (O ;,) . وحدة الرسم 1 cm

نعتبر النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب :

$z_D + 2 =$ $- 1 + 6i$ ، $z_C = 6 + 3i$ ، z_B $1 + 2i$ = ، z_A i

1. مثل النقط A ، B ، C و D .
2. بين أنه يوجد تشابه مباشر وحيد f بحيث $f(A) = B$ و $f(C) = D$.
   بين أن هذا التشابه هو دوران يطلب تعيين عناصره المميزة .
3. لتكن J النقطة ذات اللاحقة $5i + 3$.
   بين أن الدوران R الذي مركزه J و زاويته $-\pi$ يحول A إلى D و C إلى B .
4. نسمي I النقطة ذات اللاحقة $M + 1$. i و N منتصفا القطعتين [AC] و [BD] على الترتيب .
   عين ، باستعمال ما سبق ، طبيعة الرباعي IMJN .
5. نعتبر النقطتين P و Q بحيث يكون الرباعيان IAPB و ICQD مربعين مباشرين .
   أرسم الشكل .
   أ. أحسب z_P و z_Q لاحقتي النقطتين P و Q على الترتيب .
   ب. عين: و و قيسا لكل من الزاويتين (;) و (;) .

استنتج ، عندئذ ، العناصر المميزة للتشابه المباشر g الذي يحول A إلى P و C إلى Q

5. استنتج أن J هي صورة M بالتحويل g . ما هو موضع النقطة J ؟

التمرين الخامس(04 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 =$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$(u_n) = u_{n+1} +$)

1. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0 ;+\infty[$ بـ : $f(x) =$ ($x +$) . و ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O ;,) .
1. أنشيء النقط A_3 ، A_2 ، A_1 ، A_0 من (C) ذات الفواصل u_3 ، u_2 ، u_1 ، u_0 باستعمال المنصف الأول .
2. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .
2. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n \leq$.
   ب. بين أنه من أجل كل $f(x) \leq x$ ، $x \geq$.
   ج. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من الرتبة الأولى .
   د. أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3. لتكن L نهاية المتتالية (u_n) . بين أن العدد الحقيقي L هو حل للمعادلة $f(x) = x$.
استنتج قيمة L .

تصحيح موضوع الاختبار رقم 16 لتحضير امتحان شهادة البكالوريا
شعبة الرياضيات

التمرين الأول (03 نقط)

ذكر اما صحة و اما خطأ ما يلي مع التبرير:

1. من أجل كل عدد مركب z ، $Re(z^2) = [Re(z)]^2$. خاطئة
لأنه من أجل $z = 1 + i$ مثلا ، $z^2 = 2i$ و $Re(z^2) = 0$ و $[Re(z)]^2 = 1$ و $1 \neq 0$.

2. صحيح
و $iz = 1 + y - ix - 1$ و منه $|i z| = |1 - i z + 1|$ معناه $x^2 + (y)^2 = (1 + y)^2 + (- x)^2 - 1$
أي : $2y = 2y$ - أي $y = 0$ أي $Im(z) = 0$.

3. في المستوي المركب ، إذا كان $|z - z| = |'z + z'|$ فان المستقيمين (OM) و ('OM) متعامدان . صحيحة
لأنه بوضع : $z = x + iy$ و $'z' = x' + iy$ مع $(x ;y ;x' ;y') \in R^4$ نجد :
$|z - z| = |'z + z'|$ معناه :+ $(x + x')^2 + (y + y')^2 = (x - x')^2$ $y - y')^2$
أي : $2xx' + 2yy' = - 2xx' - 2yy$ أي $xx' + yy' = 0$ أي . $= 0$
أي : $(OM) (OM') \perp$.

التمرين الثاني (04 نقط)

نعتبر ، في Z^2 ، المعادلة $18\ 84 = 4y + x$ ..... (*)

1. أ. اثبات أنه اذا كان (x , y) حلا للمعادلة (*) ، فان $[2\ 0 \equiv x]$
(*) تعني $42 = 2y + 9x$ أي: $9x = 2(21 - y$ و بالتالي بما أن 9 و 2 أوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص 2 يقسم x أي: $[2\ 0 \equiv x]$.

ب. استنتاج حل خاص للمعادلة (*) :
نضع $x = 2$ فنجد $2y = 42 - 18 = 24$ أي $y = 12$. الحل الخاص هو $(12; 2)$.

ج. حل المعادلة (*) ثم استنتاج الحلول (x , y) التي تحقق : $x y > 0$:
لدينا مما سبق $[2\ 0 \equiv x]$ أي $(k \in Z\ x = 2k)$ و بالتعويض في (*) نجد $18k + 2y = 42$
أي $y = 21 - 9k$ و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (*) هي $\{S = \{(2k ;21 - 9k) / k \in Z\}$.
$xy > 0$ معناه $2k(21 - 9k) > 0$ أي $k \in]\ 0 ; \ [$ و $2,33 \approx$
لكن $k \in Z$ أي $k = 1$ أو $k = 2$ و بالتالي $x = 2$ و $y = 12$ أو $x = 4$ و $y = 3$
و منه $\{(x ;y) \in \{(2 ;12),(4 ;3)\}$

2. N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\gamma}$ في النظام ذي الأساس 5 ،
و يكتب $\overline{\alpha\beta}$ في النظام ذي الأساس 7 .

تعيين الأعداد الطبيعية α ، β ، γ ثم كتابة N في النظام العشري :

لدينا $N = 3 \times 5^4 + \alpha \times 5^2 + \beta \times 5 + \gamma$ و $N = 5 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + \alpha \times 7 + \beta$

حيث $5 > \alpha \geq 0$ و $5 > \beta \geq 0$ و $5 > \gamma \geq 0$ و بالتالي : $18 - \gamma 85 = \beta 4 + \alpha$.

- لما $\gamma = 0$ نجد $18\ 85 = \beta 4 + \alpha$ مستحيل لأن الطرفان مختلفي الشفعية .

- لما $\gamma = 1$ نجد $18\ 84 = \beta 4 + \alpha$ أي (*) و منه $\alpha = 4$ و $\beta = 3$

أخيرا $5 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 4 \times 7 + 3 = 1991$ و $N =$.

- لما $\gamma = 2$ نجد $18\ 83 = \beta 4 + \alpha$ مستحيل لأن الطرفان مختلفي الشفعية .

- لما $\gamma = 3$ نجد $18\ 82 = \beta 4 + \alpha$ أي $41 = 2\beta + 9\alpha$

أي $9\alpha \equiv 1[2]$ لكن $9 \equiv 1[2]$ و منه $\alpha \equiv 1[2]$ أي $\alpha = 1$ أو $\alpha = 3$

و منه $\beta = 16$ مستحيل أو $\beta = 7$ مستحيل .

- لما $\gamma = 4$ نجد $18\ 81 = \beta 4 + \alpha$ مستحيل لأن الطرفين مختلفا الشفعية .

التمرين الثالث (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ;,,)$.

ليكن (P_2) ، (P_1) المستويان ذا المعادلتين الديكارتيتين على الترتيب :

$x - 2y + 4z - 9 = 0$ ، $2x + y + z - 6 = 0$ -

1. إثبات أن (P_1) و (P_2) متعامدان :

؛ الشعاعان الناظميان على الترتيب لـ (P_2) ، (P_1) .

لدينا . $= -2(1) + 1(-2) + 1(4) = -4 + 4 = 0$ و منه $(P_2) \perp (P_1)$.

2. نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .

إثبات أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو : ($t \in R$) :

لدينا $-2(-7 + 2t) + (-8 + 3t) + t - 6 = 14 - 4t - 8 + 3t + t - 6 = 0$

و منه التمثيل الوسيطي السابق هو لمستقيم محتوى في (1) ..... (P_1)

كذلك: $-7 + 2t + 16 - 6t + 4t - 9 = 0$ و منه التمثيل $-7 + 2t - 2(-8 + 3t) + 4t - 9 =$

الوسيطي السابق هو لمستقيم محتوى في (2) ..... (P_2)

من (1) و (2) نجد أن التمثيل الوسيطي السابق هو لمستقيم تقاطع (P_1) و (P_2) أي لـ (D) .

3. لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D). و لتكن A النقطة ذات الإحداثيات $(-9 ; -4 ; -1)$

أ. نتحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (P_1) و لا إلى المستوي (P_2) :

لدينا : $-2(-9) + (-4) + (-1) - 6 = 18 - 4 - 1 - 6 = 7 \neq 0$ و منه $A \notin (P_1)$.

لدينا : $-9 - 2(-4) + 4(-1) - 9 = -9 - 8 + 9 - 4 = -14 \neq 0$ و منه $A \notin (P_2)$.

ب. نبين أن : $AM^2 = 14\ t^2 - 14\ t + 21$

$AM^2 = (-7 + 2t + 9)^2 + (-8 + 3t + 4)^2 + (t + 1)^2 = (2t + 2)^2 + (3t - 4)^2 + t^2 + 2t + 1$

$= 4t^2 + 8t + 4 + 9t^2 - 24t + 16 + t^2 + 2t + 1 = 14t^2 - 14t + 21$

ج. لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f(t) = 2\ t^2 - 2\ t + 3$

- دراسة تغيرات الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على R لأنها كثير حدود و دالتها المشتقة f' تحقق : من أجل كل t من R ،
f'(t) = 4t – 2 و منه الدالة f متناقصة تماما على] - ∞ ; [و متزايدة تماما على [; + ∞ [
f( ) = 2() – 2() + 3 = قيمة حدية صغرى للدالة f .

- البحث عن النقطة M التي تكون من أجلها المسافة AM أصغرية :

لدينا (AM² = 7 f(t أي أصغر قيمة لـ AM² هي من أجل t =
و منه بتعويض t بـ في التمثيل الوسيطي لـ (D) ، نجد : x = - 7 + 1 = - 6 ؛
y = + = - 8 ؛ z = و منه M_{min}(- 6 ; - ;) .

في كل ما يأتي ، نرمز بـ I للنقطة المذكورة سابقا .

4. ليكن (Q) المستوي العمودي على (D) و المار من النقطة A .

أ. تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) :

من التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد شعاع توجيه للمستقيم (D) أي شعاع ناظمي للمستوي (Q) و منه معادلة ديكارتية لـ (Q) من الشكل 2x + 3y + z + d = 0 .

لكن (A (Q∋و منه - 18 – 12 – 1 + 0 = d أي d = 31

و بالتالي Q) : (2x + 3y + z + 31 = 0 .

ب. نبرهن أن I هي المسقط العمودي للنقطة A على (D) :

AI هي أصغر مسافة بين A وM من(D) . أي أن المثلث AMI قائم في I

و منه I هي المسقط العمودي لـ A على (D) .

(. = (- 6 + 9)(2) + (- +4)(3)(4+) + (1)(1 +) – 6 = 3/2+ – 6 = 6 – 6 = 0)

التمرين الرابع (05 نقط)

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس مباشر (O ;,) . وحدة الرسم 1 cm

نعتبر النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب :

= - 1 + 6i z_D + 2 = ، z_C = 6 + 3i ، z_B = 1 + 2i ، z_A i

1. تمثيل النقط A ، B ، C و D في الورقة الملحقة .

2. نبين أنه يوجد تشابه مباشر وحيد f بحيث f(A) = B و f(C) = D :

بما أن A ≠ C و B ≠ D فانه يوجد تشابه مباشر وحيد f يحول A إلى B و C إلى D عبارته المركبة z' = a z + b مع (a ;b) ∈ C² و a ≠ 0 .

أي بالطرح نجد: a = = = = =

= = = = i

بالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة ، نجد : b = - 1 + 6i – i(6 + 3i) = 2

و منه : f : z' = i z + 2 .

نبين أن هذا التشابه هو دوران يطلب تعيين عناصره المميزة :

لدينا:= |a| 1 = |i| و منه f دوران زاويته θ = π = arg(i) و مركزه Ω النقطة ذات اللاحقة z_Ω

= = = = 1 + i

3. لتكن J النقطة ذات اللاحقة 3 + 5i .

نبين أن الدوران R الذي مركزه J و زاويته - π يحول A إلى D و C إلى B :
هذا الدوران يقبل عبارة مركبة من الشكل z) $z' - z_J = e^{-i\pi/2}$: z_J -
لتكن C ، 'A صورتي C ، A على الترتيب بالدوران R . لدينا :
$z_{A'} = -i(2 + i - 3 - 5i) + 3 + 5i = -1 + 6i = z_D$ أي $R(A) = D$
$z_{C'} = -i(6 + 3i - 3 - 5i) + 3 + 5i = 1 + 2i = z_B$ أي $R(C) = B$
4. نسمي I النقطة ذات اللاحقة 1 + M . i و N منتصفا القطعتين [AC] و [BD] على الترتيب .
تعيين ، باستعمال ما سبق ، طبيعة الرباعي IMJN :
لدينا: $R(A) = D$ و $R(C) = B$ و منه صورة القطعة [AC] بالدوران R هي القطعة [DB] و بالتالي $R(M) = N$ لان الدوران يحافظ على الأشكال . و منه JM = JN و [2π] (,) ≡ - π]
كذلك $f(A) = B$ و $f(C) = D$ و منه صورة القطعة [AC] بالدوران f هي القطعة [BD] و بالتالي $f(M) = N$ و منه [2π] (;) ≡ π] أي أن الرباعي IMJN مربع .
5. نعتبر النقطتين P و Q بحيث يكون الرباعيان IAPB و ICQD مربعين مباشرين .
رسم الشكل في الورقة الملحقة .
أ. حساب z_P و z_Q لاحقتي النقطتين P و Q على الترتيب :
لدينا = و منه z_P = $z_A - z_I + z_B = 2 + i - 1 - i + 1 + 2i = 2 + 2i$
و = و منه $z_Q = z_C - z_I + z_D = 6 + 3i - 1 - i - 1 + 6i = 4 + 8i$
ب. تعيين و و قيسا لكل من الزاويتين (;) و (;) :
= | | | | = | | | | = | | | | =
= = | | | | = | | | | = | | | | =
arg ( ) = arg (1 + I) = π = (;)
( ) arg () = arg () = arg = (;)
arg ( ) = arg (1 + I) = π =
استنتاج ، عندئذ ، العناصر المميزة للتشابه المباشر g الذي يحول A إلى P و C إلى Q :
بما أن: = و (;) (;) = فانه يوجد تشابه مباشر وحيد g يحول A إلى P و C إلى Q مركزه I ، نسبته و زاويته π .
6. استنتاج أن J هي صورة M بالتحويل g :
لدينا M منتصف [AC] و منه z_M = = = = 4 + 2i
= = | | | | = | | | | = | | | |
() arg ( ) = arg ( ) = arg () = arg = (;)
arg (1 + I) = π =
وبالتالي g(M) = J .
تعيين موضع النقطة J :
بما أن M منتصف [AC] و التشابه g يحول [AC] إلى [PQ] فان J هي بالضرورة منتصف [PQ] .

التمرين الخامس (04 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 = و من أجل كل عدد طبيعي n :
$(u_n$ = u_{n+1} +)
1. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على]0 ;+∞ [بـ : (x) = f(x) + ( ) .

و ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O ;,) .

3. انشاء النقط A_3 ، A_2 ، A_1 ، A_0 من (C) ذات الفواصل u_3 ، u_2 ، u_1 ، u_0

4. وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها :
من الشكل يظهر أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ابتداء من n = 1 و متقاربة .
2. أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم u_n ، n ≤ :
الاستدلال بالتراجع : نضع : P(n) : $(u_n \geq$:
أ. نبرهن صحة u_1 > 2.25 = = (4 +) = $(u_0$ +) : P(1) = و منه المطلوب .
ب. نفرض صحة P(n) ونبرهن صحة : ≤ u_{n+1} : P(n + 1)
لدينا u_n ≤ و منه f ≥ (u_n)f() لأن الدالة f متزايدة تماما على [;+∞ [
لأن > 0 :ي من أجل كل
x ≥ ، f(x) – x ≤ 0
وبالتالي f(x) ≤ x .
ج. استنتاج أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من الرتبة الثانية :
لدينا مما سبق من أجل كل f(x) ≤ x ، x ≥ . بوضع u_n = x نجد $f(u_n) \leq u_n$ أي $u_{n+1} \leq u_n$
وهذا من أجل كل≤ 1 n و منه المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من الرتبة الثانية .
د. اثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة:
بما أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد فإنها متقاربة نحو عدد أكبر أو يساوي .
3. لتكن L نهاية المتتالية (u_n) .
نبين أن العدد الحقيقي L هو حل للمعادلة f(x) = x :
∞ = ∞ = L أي ∞ = L و منه = L
لكن f(L =) لأن الدالة f مستمرة على]0 ;+∞ [و منه f(L) = L
أي : L حل للمعادلة f(x) = x .
استنتاج قيمة L :
مما سبق وجدنا : f(x) – x = و منه f(x) = x معناه x = لأن x > 0

أي L = .