

План заняття №10

З дисципліни: вища математика

Тема: Дослідження функції на опуклість та перегин

Мета заняття:

Навчальна: навчитися досліджувати функцію на опуклість за допомогою похідної, ввести поняття точок перегину;

Виховна: виховувати інтерес до математики, уважність, охайність, працьовитість;

Методична: розвивати увагу, мислення, пам'ять, культуру математичної мови, формувати вміння ставити мету та робити висновки.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В., Барковська Н., Лопатін О. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник. Київ: Центр навч. літ., 2019. 424 с.
2. Бойко О., Черняк О., Пономаренко В. Вища математика. Харків : Фоліо, 2014. 669с.
3. Герич М. С., Синявськ О. О. Математична статистика: навч. посіб. Ужгород : Говерла, 2021. 146 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Київ : Вища школа, 2006. 648 с.
5. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі. Київ: Академія, 2003. 624 с.
6. Казановський В.І. Вища математика: навч. посіб. Київ: Аграрна освіта, 2014. 367 с.
7. Кузьма О.В. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 127 с.
8. Лавренчук В.П. Вища математика. Загальний курс. Ч.1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Чернівці : Книга – ХХІ, 2010. 319 с.
9. Литвин І.І., Конончук О.М., Железняк Г.О. Вища математика. Київ: ЦУЛ, 2004. 272 с.
10. Личковський Е.І., Свердан П.Л., Тіманюк В.О. Вища математика: підручник. Вінниця: Нова книга, 2014. 632 с.
11. Підченко Ю.П., Пастушенко С.М. Вища математика. Навч. посібник для студентів вищих навчальних закладів. 1 частина. Київ : Діал, 2004. 191 с.

12.Підченко Ю.П., Пастушенко С.М. Вища математика. Навч. Посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2 частина. Київ : Діал, 2004. 198 с.

План заняття

1. Проміжки опуклості і вгнутості.
2. Точки перегину.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

1. Означення. Графік неперервної диференційованої функції $f(x)$, $x \in]a;b[$ називається опуклим вгору на інтервалі $]a;b[$, якщо похідна $f'(x)$ спадає на $]a;b[$. А якщо $f'(x)$ зростає на $]a;b[$, то графік цієї функції називається опуклим вниз.

Неважко помітити, що якщо графік функції опуклий вгору, то всі його точки знаходяться нижче будь-якої його дотичної, оскільки кутовий коефіцієнт дотичної зменшується із зростанням x . А якщо графік опуклий вниз, то всі точки знаходяться вище будь-якої її дотичної (крім, звичайно, самої точки дотику).

Означення. Інтервали, на яких графік функції опуклий вгору або вниз, називаються інтервалами опуклості графіка функції.

2. Достатні умови опуклості графіка функції. Теорема.

Нехай функція $f(x)$, $x \in]a;b[$ має першу і другу похідні.

Тоді, якщо $f''(x) < 0$ для всіх $x \in]a;b[$, то на інтервалі $]a;b[$ графік функції $f(x)$ опуклий вгору, якщо ж $f''(x) > 0$ для всіх $x \in]a;b[$, то графік функції $f(x)$ опуклий вниз на $]a;b[$.

Сформулюємо тепер правило знаходження інтервалів опуклості графіка функції.

Нехай функція $y = f(x)$, $x \in]a;b[$ має в інтервалі $]a;b[$ похідні другого порядку включно, крім, можливо, скінченного числа точок, і $f''(x)$ має не більше скінченного числа нулів в інтервалі $]a;b[$.

Тоді для знаходження інтервалів опуклості графіка функції потрібно:

1. Знайти всі точки, в яких або $f''(x) = 0$, або $f''(x)$ не існує (ці точки називаються критичними точками функції за другою похідною).

2. В кожному з інтервалів, на які розбивається інтервал $]a;b[$ критичними точками, знайденими в першому пункті даного правила, встановлюється знак $f''(x)$.

Якщо в даному інтервалі $f''(x) > 0$, то на цьому інтервалі графік функції опуклий вниз, якщо ж $f''(x) < 0$, то опуклий вгору.

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості графіка функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання. Задана функція на всій числовій прямій має похідні $f'(x) = 3x^2$ і $f''(x) = 6x$. Отже, маємо одну критичну точку за другою похідною. Вона розбиває числову пряму на два інтервали $]-\infty;0[$ і $]0;+\infty[$.

Оскільки $f''(x) > 0$ для всіх $x > 0$ і $f''(x) < 0$ для всіх $x < 0$, то графік функції опуклий вниз на інтервалі $]0;+\infty[$ і опуклий вгору на інтервалі $]-\infty;0[$.

3. Точки перегину. Як впливає з прикладу 1 попереднього пункту, точка з абсцисою $x = 0$ графіка функції $f(x) = x^3$ є одночасно кінцем інтервалу опуклості вгору і кінцем інтервалу опуклості вниз.

Означення. Точка графіка диференційованої функції, яка є одночасно кінцем інтервалу опуклості вгору і кінцем інтервалу опуклості вниз, називається точкою перегину графіка цієї функції.

Очевидно, що в точці перегину дотична до графіка кривої повинна, з одного боку, знаходитись вище графіка кривої, а з другого – нижче його, тобто перетинати криву в цій точці (рис. 98)

Теорема 1. (необхідна умова). Нехай функція $f(x)$ на інтервалі $]a;b[$ має неперервну похідну другого порядку. Тоді, якщо точка з абсцисою $x_0 \in]a;b[$ є точкою перегину графіка цієї функції, то $f''(x_0) = 0$

Теорема 2. (достатня умова) . Нехай функція $f(x)$ на інтервалі $]a;b[$ має похідну другого порядку. Тоді, якщо $f''(x)$ змінює знак при переході аргументу через $x_0 \in]a;b[$, то x_0 є абсцисою точки перегину графіка заданої функції.

Отже, для знаходження точок перегину графіка функції $f(x)$, $x \in]a;b[$, потрібно:

- 1) знайти критичні точки функції за другою похідною;
- 2) дослідити знак другої похідної в деякому околі критичної точки.

Тоді, якщо $f''(x)$ змінює знак при переході аргументу через критичну точку x_0 то $(x_0; f(x_0))$ - точка перегину графіка заданої функції.

Приклад. Знайти точки перегину графіка функції

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1.$$

Розв'язання. Задана функція на всій числовій прямій має похідні

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2, \quad f''(x) = 12x(x-1).$$

Знайдемо критичні точки функції (за другою похідною) з рівняння $f''(x) = 0$, тобто $12x(x-1) = 0$. Отже, $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$ - критичні точки заданої прямої. З'ясуємо знак $f''(x)$ в околі точок $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$.

Якщо $x \in]-\delta; 0[$, то $f''(x) > 0$; якщо $x \in]0; \delta[$, то $f''(x) < 0$. Отже, точка $(x_1; f(x_1)) = (0; 1)$ точка перегину.

Якщо $x \in]1 - \delta; 1[$, то $f''(x) < 0$, а якщо $x \in]1; 1 + \delta[$, то $f''(x) > 0$. Отже, точка $(x_2; f(x_2)) = (1; 0)$ - точка перегину.

Контрольні питання

1. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції:

а) $y = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1$;

б) $y = x^4 + (9/2)x^2 - 5$

в) $y = (2x - 5)^3;$

г) $y = (1/3)x^3 - 2x^2 + 33x + 1$

д) $y = \cos x;$