

Дата **22.02.2023** Группа ХКМ 2/1. Курс 2. Семестр IV

Дисциплина: Техническая механика

Специальность: 15.02.06 «Монтаж и техническая эксплуатация холодильно-компрессорных машин и установок (по отраслям)»

Тема занятия: Построение эпюр в случае приложения равномерно распределённой нагрузки

Цель занятия:

–*методическая*– совершенствование методики проведения лекционного занятия; сочетание инновационных методов обучения с традиционной методикой преподавания;

–*учебная*– дать представление студентам об эпюрах поперечных сил и изгибающих моментов в случае приложения равномерно распределённой нагрузки;

–*воспитательная*– воспитывать культуру общения с использованием специальной терминологии, усидчивость, внимательность, графические и аналитические способности, чувство гордости за выбранную профессию.

Вид занятия: лекция

Междисциплинарные связи:

Обеспечивающие: Инженерная графика, Физика, Математика

Обеспечиваемые: Техническая механика, Детали машин, Курсовое и дипломное проектирование,

Обеспечение занятия:

Техническое:

Методическое: иллюстративный раздаточный материал.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Никитин Е.М. Теоретическая механика для техникумов. М.: Высшая школа, 2014
2. Олофинская В.П. Техническая механика. Сборник тестовых заданий. – Москва, Форум, Инфра М, 2014.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. – Москва, Высшая школа, 2013.

Дополнительная литература:

1. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. - М.: Высшая школа, 2012.

<https://yandex.ru/video/preview/2786467600528074881> Построение эпюр для консольной балки с распределённой нагрузкой

Тема: Построение эпюр в случае приложения равномерно распределённой нагрузки

1. Основные правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в случае приложения равномерно распределенной нагрузки.
2. Примеры решения задач

1. Основные правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в случае приложения равномерно распределенной нагрузки

Теоретические предпосылки и указания к построению эпюр.

Правила знаков для Q и M , проверки построения эпюр.

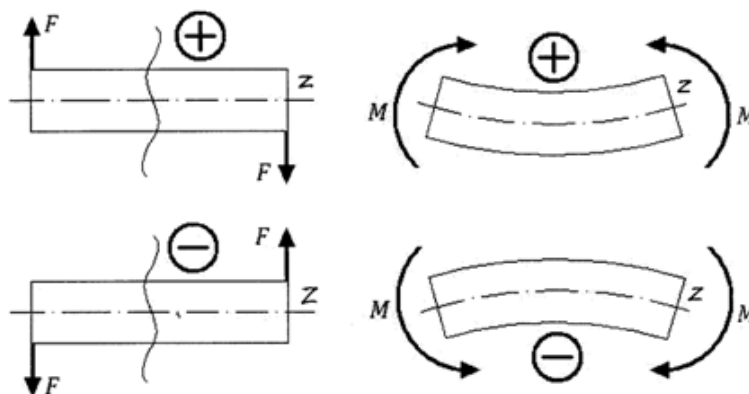
Как построить эпюры Q и M . При прямом поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникает два внутренних силовых фактора – поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x . Для построения эпюр этих внутренних силовых факторов важно знать, чему они численно равны (определение) и правила знаков.

Поперечная сила, возникающая в сечении балки – это внутреннее усилие, равное алгебраической сумме проекций внешних сил, действующих по одну сторону от этого сечения на плоскость поперечного сечения.

Правило знаков. Положительная поперечная сила поворачивает рассматриваемую часть балки по часовой стрелке. (кратко – по часовой плюс, против – минус).

Изгибающий момент в сечении балки – это внутреннее усилие, равное алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от этого сечения, относительно центра тяжести сечения.

Правило знаков. Положительный изгибающий момент соответствует (т.е. вызывает) растяжению нижних волокон.



Правила знаков при определении поперечной силы и изгибающего момента

Для отыскания опасного сечения строят эпюры Q_y и M_x , используя метод сечения, либо метод характерных точек.

Эпюра – это график, показывающий изменение того или иного фактора по оси балки. Сечения расставляются на характерных участках, характерный участок балки – это участок между какими-либо изменениями. Изменения – это сосредоточенные силы или моменты, начало и конец распределенной нагрузки. Характерные точки – это точки, сколь-либо заметные на балке, т.е. точки приложения сосредоточенных сил, моментов и т.д.

Для того чтобы вычислить поперечную силу и изгибающий момент в произвольном сечении, необходимо мысленно рассечь плоскостью в этом месте балку и часть балки (любую), лежащую по одну сторону от рассматриваемого сечения, отбросить. Как правило, отбрасывают ту часть балки, которая представляется наиболее сложной. Затем по действующим на оставленную часть балки внешним силам надо найти искомые значения Q_y и M_x , причем знак их надо определить в соответствии с принятыми ранее правилами знаков.

При построении эпюры слева направо отбрасывается правая часть балки, а Q_y и M_x находятся по силам, действующим на левую часть. При построении эпюры справа налево, наоборот, отбрасывается левая часть, Q_y и M_x определяются по силам, действующим на правую часть балки.

Для построения эпюр проводят нулевые линии под изображением балки. Тогда каждому сечению балки соответствует определенная точка этой линии. **Положительные значения поперечных сил** откладывают в принятом масштабе перпендикулярно нулевой линии **вверх** от нее, **отрицательные — вниз**.

При построении эпюры M_x у **строителей** принято: ординаты, выражающие в определенном масштабе **положительные значения изгибающих моментов**, откладывать со стороны растянутых волокон, т.е. — **вниз**, а **отрицательные — вверх** от оси балки. У **механиков** **положительные значения и поперечной силы и изгибающего момента откладываются вверх**.

Найденные значения поперечной силы и изгибающего момента соединяют соответствующими линиями.

Построенные эпюры Q_y и M_x заштриховывают прямыми линиями, перпендикулярными нулевой линии. Каждый штрих таким образом характеризует значение внутреннего силового фактора Q_y или M_x , действующих в данном сечении балки. На эпюрах ставятся знаки.

2. Примеры решения задач

Задание 1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для заданной балки.

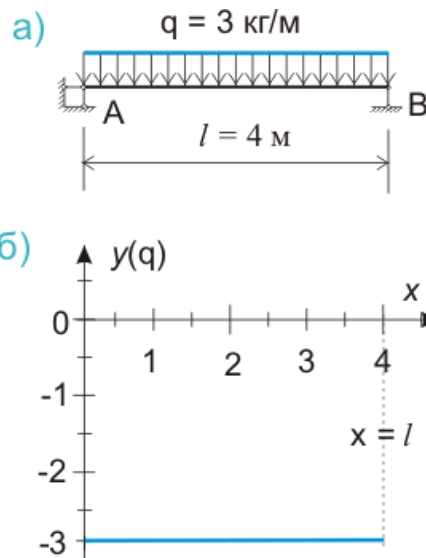


Рисунок 1- Равномерно распределенная нагрузка, а) общепринятое изображение, б) график функции - равномерно распределенной нагрузки

Расчет строительных конструкций, в частности балок, основан на общих принципах статического равновесия системы. Исходя из этих принципов, мы можем заменить любые опоры балки сосредоточенными силами - опорными реакциями, при этом балка все равно останется в состоянии статического равновесия.

Но и это еще не все, теоретически мы можем отсечь любую часть балки, а вместо отсеченной части приложить в месте полученного сечения еще некоторые силы или даже моменты сил так, чтобы балка опять оставалась в состоянии статического равновесия. На этой теоретической предпосылке основан метод сечений, упоминавшийся выше.

Конечно же поперечные силы (действие продольных сил мы пока не рассматриваем) и изгибающие моменты, которые необходимо приложить в различных сечениях балки для сохранения статического равновесия системы, могут иметь разные значения. При этом эпюры поперечных сил и изгибающих моментов как раз и показывают нам, как изменяются значения поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях по длине балки.

Собственно именно для этого эпюры и нужны, так как позволяют даже визуально определить сечение в котором действуют максимальные нормальные и(или) касательные напряжения. Весь остальной расчет на прочность - дело техники. Но вернемся к эпюрам, в частности рассмотрим

равномерно распределенную нагрузку показанную на рисунке 1, как наиболее простую.

Когда мы рассекаем балку, и рассматриваем оставшуюся часть, то часть нагрузки, действующей на балку, также отсекается:

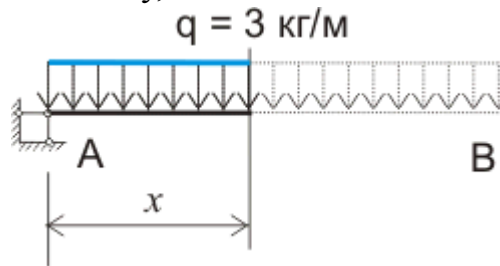


Рисунок 545.3. Отсечение части балки вместе с нагрузкой, метод сечений

Так, если мы рассматриваем сечение на расстоянии 1 м от начала балки, то общая нагрузка, действующая на рассматриваемую часть балки, составит 3 кг, на расстоянии 2 м - 6 кг и так далее.

Получается, что чем больше расстояние от точки А до рассматриваемого сечения (или от начала координат до точки x), тем большую силу нужно приложить в рассматриваемом сечении, чтобы отсеченная часть балки оставалась в равновесии. Более того, мы видим здесь явную закономерность, которую можно выразить следующим уравнением:

$$Q = - 3x \text{ (545.4.1)}$$

А если присмотреться к формулам (545.1.2) и (545.4.1), то мы увидим, что поперечная сила есть ничто иное, как дифференциал функции нагрузки. Другими словами, чтобы определить значение поперечных сил в том или ином поперечном сечении, нам нужно проинтегрировать уравнение (545.1.2):

$$Q = \int q dx = - \int 3 dx + A = - 3x + A \text{ (545.4.2)}$$

где A - некая постоянная величина, как это следует из общих [правил интегрирования](#). В данном случае A - это значение опорной реакции. Как именно определяются опорные реакции в зависимости от нагрузки на балку - это отдельная [большая тема](#). Здесь просто отметим, что при равномерно распределенной нагрузке на балку $A = B = ql/2$. В данном случае при значении нагрузки $q = 3 \text{ кг/м}$ опорные реакции составят $A = B = 3 \cdot 4/2 = 6 \text{ кг}$.

Теперь у нас есть все необходимые данные для построения эпюры поперечных сил при действии на балку равномерно распределенной нагрузки:

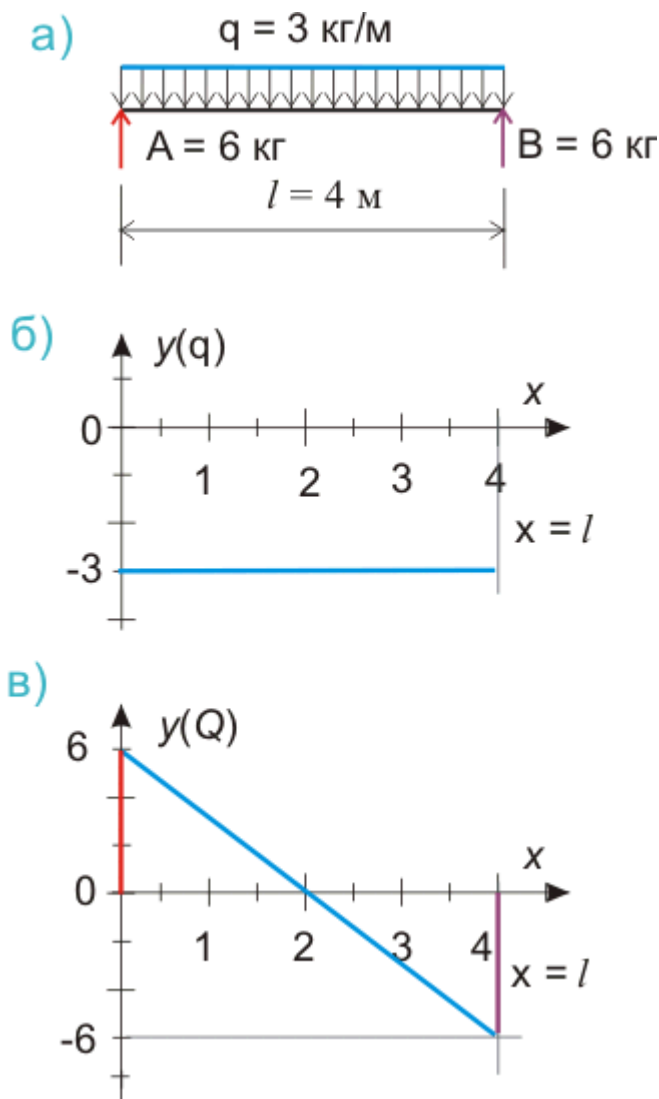


Рисунок 545.4 - Равномерно распределенная нагрузка: а) общепринятое обозначение, опорные реакции, б) график функции - равномерно распределенной нагрузки, в) график функции - поперечных сил, действующих в сечениях балки.

Сразу отметим важную особенность эпюр поперечных сил, из которой вытекает одно из общих правил построения эпюр:

1. В местах приложения сосредоточенных сил, будь то опорные реакции или любые другие сосредоточенные силы, направленные вертикально, на эпюре "Q" всегда будет резкое изменение. При этом разница значений, определяемая по эпюре, будет равна значению приложенной сосредоточенной силы, а направление изменения будет такое же, как и у приложенной силы.

Подтверждение этой особенности мы видим и на рисунке 545.4.в), где в начале и в конце балки наблюдается скачкообразное изменение значений поперечных сил, равное значению опорных реакций.

Это правило действует для всех балок вне зависимости от степени статической неопределимости, количества и вида опор. Более того, это правило действует и при построении эпюр поперечных сил для рам.

Построение эпюр изгибающих моментов

Как тонко подметил Архимед, любая сила, приложенная с некоторым плечом относительно рассматриваемой точки, создает вращающий момент. И чем больше плечо, тем больше значение вращающего момента при одном и том же значении приложенной силы.

Это правило рычага действительно и при построении эпюр изгибающих моментов. Вот только моменты называются не вращающими, а изгибающими, но суть от этого не меняется. Так предполагается, что в любом поперечном сечении балки, находящемся на расстоянии x от начала балки (начала координат) могут действовать изгибающие моменты.

Например в нашем случае в начале балки приложена сосредоточенная сила - опорная реакция $A = 6$ кг, соответственно эта сила будет создавать изгибающий момент Ax , где x - плечо действия силы. При этом равномерно распределенная нагрузка также будет создавать изгибающий момент. А чтобы определить значение этого момента, сначала определяется общее значение нагрузки $-qx$, что мы и делали при построении эпюры поперечных сил. Общее значение распределенной нагрузки в рассматриваемом сечении можно рассматривать как равнодействующую сосредоточенную силу, а прикладывается эта сила в центре тяжести эпюры нагрузки. Т.е. в этом случае мы рассматриваем эпюру нагрузки, как некое физическое тело, имеющее плотность и соответственно центр тяжести. Впрочем с точки зрения теории сопротивления материалов в этом нет ничего удивительного.

Определить положение центра прямоугольной эпюры нагрузки несложно. Подобными упражнениями мы занимались в школе, когда определяли центр тяжести линейки. И находится этот центр тяжести посередине длины линейки, а в данном случае посередине рассматриваемой части эпюры нагрузки и составляет $x/2$. Таким образом плечо действия равнодействующей сосредоточенной силы при равномерно распределенной нагрузке составляет $x/2$. При этом функциональное уравнение изгибающих моментов, необходимое для построения эпюры моментов, будет иметь следующий вид:

$$M = Ax - qx \cdot x/2 = Ax - qx^2/2 \quad (545.5.1)$$

Примерно такой же результат мы получим, если проинтегрируем уравнение поперечных сил:

$$M = \int (A - qx) dx = M_0 + Ax - qx^2/2 \quad (545.5.2)$$

Где $M_0 = 0$ - это опять же постоянная интегрирования. В данном случае - значение момента на опоре А. Так как мы рассматриваем однопролетную безконсольную балку на шарнирных опорах, то в этом частном случае значение момента на опоре А равно нулю. Кроме того значение момента на опоре В для шарнирной безконсольной балки также равно нулю, так как шарнирные опоры поворота сечений ни как не препятствуют. Эта особенность в частности используется при определении

опорных реакций однопролетной безконсольной балки на шарнирных опорах. Другими словами, зная, что момент на опоре **B** равен нулю, мы можем определить значение опорной реакции **A** из уравнения (45.5.2):

$$M_B = 0 = Al - ql^2/2 \quad (545.5.3)$$

$$A = (ql^2/2)/l = ql/2 \quad (545.5.4)$$

В общем случае значение момента в начале координат может быть не равно 0.

А теперь рассмотрим еще одну особенность изгибающих моментов: для рассматриваемого сечения не имеет принципиального значения, какой будет знак у момента, положительный или отрицательный, так как при любом знаке в сечении будет как растягиваемая, так и сжимаемая зона сечения. А вот какая именно зона сечения будет растягиваемой, верхняя или нижняя - имеет большое значение, потому что не все материалы имеют равное сопротивление растяжению и сжатию, а кроме того форма сечения далеко не всегда бывает прямоугольной.

В связи с этим при построении эпюр изгибающих моментов принято следующее **правило**:

Эпюра моментов строится с той стороны, где будет растянутая зона сечения. При этом момент, пытающийся вращать рассматриваемое сечение по часовой стрелке, считается положительным, а против часовой стрелки - отрицательным.

Примечание: это правило не является общепринятым. В некоторых справочниках и учебниках по теории сопротивления материалов положительный момент строится сверху от оси x , что в общем то логично, но при этом получается, что положительный момент там, где сжатая зона сечения. В других он строится с той стороны, где растянутая зона сечения, но при этом может показываться со знаком "-", если строится снизу от оси x . Но как я уже говорил выше, принципиального значения это не имеет, главное понимать общий смысл изгибающих моментов.

Если мы посмотрим на направление действия опорной реакции **A** и распределенной нагрузки **q** (рисунок 545.4), то увидим, что относительно любого из рассматриваемых сечений опорная реакция **A** пытается вращать это сечение по часовой стрелке, а распределенная нагрузка **q** - против. Это означает, что функциональное уравнение, описывающее изменение изгибающих моментов по длине балки, составлено у нас правильно.

При этом растянутой будет нижняя зона сечения балки по той причине, что балка прогнется вниз при таком действии нагрузки. Следовательно эпюру моментов в данном случае следует строить снизу от оси координат x .

Теперь у нас есть все данные для построения эпюры изгибающих моментов. Судя по уравнению (545.5.2) это будет квадратная парабола, а максимальное значение изгибающего момента будет посередине балки, так как нагрузка у нас симметричная, и составит $M = 6 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2/2 = 6$ кгм.

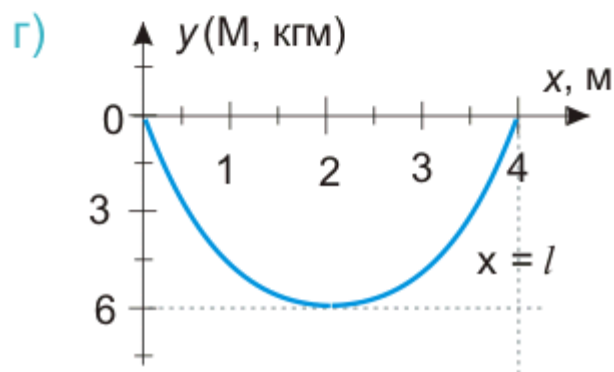
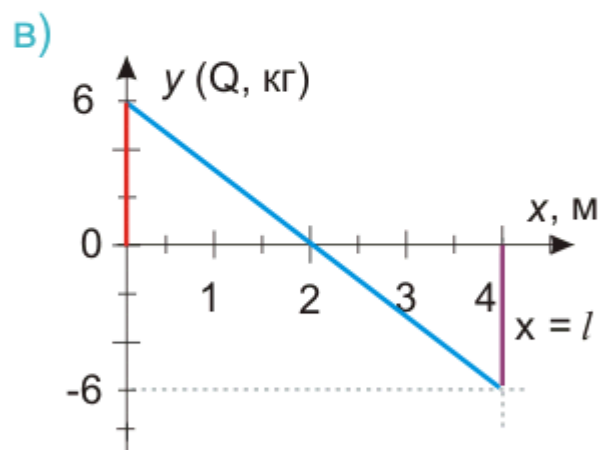
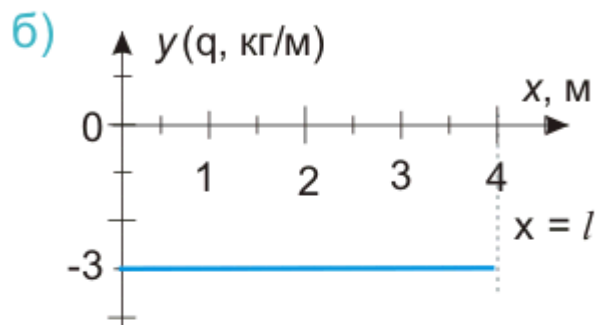
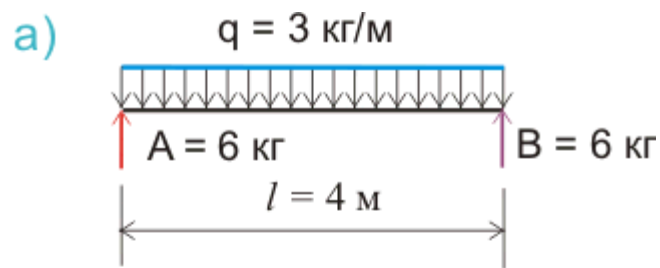


Рисунок 545.5.г) эпюра изгибающих моментов, как график функции $y = 6x - 3x^2/2$

В общем случае, когда нагрузка несимметричная, как показано на рисунках 545.2.а) и б) или на балку действуют несколько распределенных

нагрузок, то определить сечение в пролете балки, в котором действует максимальный изгибающий момент, можно, воспользовавшись следующим общим **правилом**:

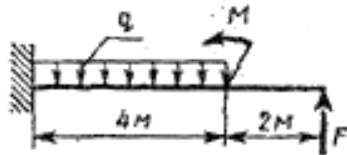
При действии распределенных нагрузок максимальный момент в пролете балки будет в том сечении, в котором значение поперечных сил равно нулю.

Контрольные вопросы

1. Что называется эпюрой?
2. Правило знаков для поперечных сил?
3. Правило знаков для изгибающих моментов

Задание для самостоятельной работы

1. Ознакомиться с лекционным материалом
2. Письменно ответить на контрольные вопросы
3. Решить пример. Для балки с жесткой заделкой построить эпюры Q и M .
Данные для расчета: $q = 10$ кН/м, $F = 20$ кН, $M = 10$ кНм.



Фотографию выполненной работы прислать в личном сообщении ВК <https://vk.com/id139705283>

На фотографии сверху должна быть фамилия, дата выдачи задания, группа, дисциплина. Например: «Иванов И.И, 22.02.23г., группа ХКМ 2/1, Техническая механика».