

УТВЕРЖДАЮ

Начальник управления образования
Могилевского облисполкома

В.В.Рыжков

«___» ноября 2016 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 19 ноября 2016 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 14.30

XI класс

1. Решите уравнение: $2x^3(x^2 + 1)^3 + 3\sqrt{x^3 + x - 6} + x^3 + x = 2016$.
2. Найдите все тройки натуральных чисел $(k; m; n)$ таких, что выполняется равенство

$$24^k - 2^k \cdot 3^{k+n} - 3^m \cdot 4^k + 3^{m+n} = \frac{2016}{4^n + 2^k + 2^m + k + n}.$$

3. На стороне AC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Отрезки AL и CK пересекаются в точке O. Докажите, что $BO = AC \cdot \operatorname{ctg} B$.

4. Шесть команд A, B, C, D, E, F провели турнир по футболу. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. Места, занятые командами, распределились в следующем порядке: A, B, C, D, E, F. При этом количества очков у команд, занявших соседние места, отличаются ровно на 1. Сколько очков набрала каждая команда? Приведите пример такого турнира. В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

5. На каждой грани куба записано некоторое число. Над числами производятся операции по следующему правилу. Выбирается вершина куба и три грани, имеющие эту общую вершину. Подсчитывается среднее арифметическое чисел, записанных на этих гранях, и каждое из трех чисел заменяется этим средним арифметическим. После того, как все вершины были использованы хотя бы по одному разу, оказалось, что на каждой грани записано то число, которое было на ней в самом начале. Найдите числа, которые были записаны на гранях куба вначале, если в конце на одной из граней оказалось число 6.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика
ХІ класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. Решение.

Запишем уравнение в виде $2(x^3 + x)^3 + 3\sqrt{x^3 + x - 6} + x^3 + x = 2016$

Пусть $x^3 + x = t$. Тогда уравнение можно записать в виде:

$$2 \cdot t^3 + 3\sqrt{t - 6} + t = 2016.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = 2 \cdot t^3 + 3\sqrt{t - 6} + t$, где $t \geq 6$. Данная функция монотонно возрастает при $t \geq 6$ (как сумма возрастающих функций). Тогда уравнение $f(t) = 2016$ имеет не более одного корня. Несложно заметить, что $t=10$ является корнем данного уравнения.

Итак $x^3 + x = 10$. Рассмотрим функцию $g(x) = x^3 + x$. Она монотонно возрастает при всех действительных x . Тогда уравнение $g(x) = 10$ имеет не более одного корня. Несложно заметить, что $x=2$ является корнем данного уравнения.

Ответ: 2

2. Решение. Преобразуем правую часть равенства:

$$24^k - 2^k \cdot 3^{k+n} - 3^m \cdot 4^k + 3^{m+n} = 6^k(4^k - 3^n) - 3^m(4^k - 3^n) = (6^k - 3^m)(4^k - 3^n).$$

Далее имеем: $(6^k - 3^m)(4^k - 3^n)(4^n + 2^k + 2^m + k + n) = 2016$.

Заметим, что $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Число $6^k - 3^m$ – нечетное и при этом кратно 3. Число $4^k - 3^n$ нечетное и при этом не кратно 3. Получаем: $4^k - 3^n = 1$ или $4^k - 3^n = 7$.

1) Положим $4^k - 3^n = 1$. (1)

Тогда $(6^k - 3^m)(4^n + 2^k + 2^m + k + n) = 2016$.

1а) Пусть $6^k - 3^m = 3$. (2)

Тогда $4^n + 2^k + 2^m + k + n = 2016 : 3 = 672$. Так как $4^5 = 1024 > 672$, то n может принимать значения от 1 до 4. Подставим эти значения в (1).

Если $n=1$, то $4^k - 3^1 = 1$, $k=1$. Тогда из (2) следует, что $m=1$. Однако непосредственная проверка показывает, что тройка чисел (1, 1, 1) не удовлетворяет исходному равенству.

Если $n=2$, то $4^k - 3^2 = 1$, $k \notin N$.

Если $n=3$, то $4^k - 3^3 = 1$, $k \notin N$.

Если $n=4$, то $4^k - 3^4 = 1$, $k \notin N$.

1б) Пусть $6^k - 3^m = 9$. (3)

Тогда $4^n + 2^k + 2^m + k + n = 2016 : 9 = 224$. Так как $4^4 = 256 > 224$, то n может принимать значения от 1 до 3. Подставим эти значения в (1).

Если $n=1$, то $4^k - 3^1 = 1$, $k=1$. Тогда из (3) получаем противоречие. Значения $n=2$ и $n=3$ не удовлетворяют равенству (1) (см. выше).

1в) Пусть $6^k - 3^m = 21$. (4)

Тогда $4^n + 2^k + 2^m + k + n = 2016 : 21 = 96$. Так как $4^4 = 256 > 96$, то n может принимать значения от 1 до 3. Подставим эти значения в (1).

Если $n=1$, то $4^k - 3^1 = 1$, $k=1$. Тогда из (2) имеем: $6^k - 3^1 = 21$, $k \notin N$.

Значения $n=2$ и $n=3$ не удовлетворяют равенству (1) (см. выше).

$$1\Gamma) \text{ Пусть } 6^k - 3^m = 63. \quad (5)$$

Тогда $4^n + 2^k + 2^m + k + n = 2016 : 63 = 32$. Так как $4^3 = 64 > 32$, то n может принимать значения 1 или 2. Подставим эти значения в (1).

Если $n=1$, то $4^k - 3^1 = 1$, $k=1$. Тогда из (5) имеем: $6^k - 3^1 = 63$, $k \notin N$.

Значение $n=2$ не удовлетворяет равенству (1) (см. выше).

$$2) \text{ Положим } 4^k - 3^n = 7. \quad (6)$$

$$\text{Тогда } (6^k - 3^m)(4^n + 2^k + 2^m + k + n) = 2016 : 7 = 288.$$

$$2a) \text{ Пусть } 6^k - 3^m = 3. \quad (7)$$

Тогда $4^n + 2^k + 2^m + k + n = 288 : 3 = 96$. Так как $4^4 = 256 > 96$, то n может принимать значения 1, 2 или 3. Подставим эти значения в (6).

Если $n=1$, то $4^k - 3^1 = 7$, $k \notin N$.

Если $n=2$, то $4^k - 3^2 = 7$, $k=2$. Тогда из (7) имеем: $6^2 - 3^m = 3$, $m \notin N$.

Если $n=3$, то $4^k - 3^3 = 7$, $k \notin N$.

$$2б) \text{ Пусть } 6^k - 3^m = 9. \quad (8)$$

Тогда $4^n + 2^k + 2^m + k + n = 288 : 9 = 32$. Так как $4^3 = 64 > 32$, то n может принимать значения 1 или 2. Подставим эти значения в (6).

Если $n=1$, то $4^k - 3^1 = 7$, $k \notin N$.

Если $n=2$, то $4^k - 3^2 = 7$, $k=2$. Тогда из (8) имеем: $6^2 - 3^m = 9$, Откуда $m=3$.

Проверка показывает, что числа $k=2$, $m=3$, $n=2$ удовлетворяют исходному равенству.

Ответ: $k = 2$, $m = 3$, $n = 2$.

3. Решение.

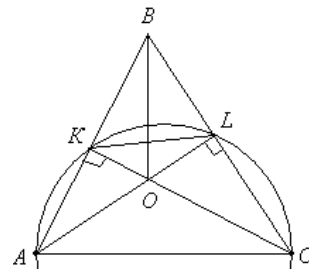
Поскольку углы ALC и AKC вписанные и опирающиеся на диаметр, то

$\angle ALC = \angle AKC = 90^\circ$, т.е. AL и CK – высоты треугольника ABC .

Так как треугольник ABC – остроугольный, то треугольники LBK и ABC подобны с коэффициентом подобия, равным $\cos B$,

$$\frac{KL}{AC} = \cos B, \quad \text{т.е. } KL = AC \cdot \cos B.$$

Рассмотрим четырехугольник $KBLO$. Так как $\angle BKO + \angle BLO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то около этого четырехугольника можно описать окружность. Причем, отрезок BO – будет диаметром этой окружности ($\angle BKO = 90^\circ$). Эта же окружность является описанной около треугольника KBL .



$$\text{Тогда } BO = \frac{KL}{\sin B} = \frac{AC \cdot \cos B}{\sin B} = AC \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Что и требовалось доказать.

4. Решение.

Всего на турнире было сыграно $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ матчей. В каждой игре разыгрывалось 2 очка (если игра закончилась вничью) или 3 очка (если игра завершилась победой одной из команд). Таким образом, сумма очков, набранных командами, находится в пределах от 30 до 45. Пусть команда F набрала n очков, тогда команды E, D, C, B, A набрали соответственно $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ и $n+5$ очков. Сумма очков равна $6n+15$.

Эта сумма должна быть больше 30 (все игры не могли закончиться вничью, иначе все команды набрали бы поровну очков), но меньше 45 (если бы все игры закончились победой одной из команд, то количество очков у каждой команды было бы кратно 3, что противоречит условию).

Имеем: $30 < 6n + 15 < 45$, откуда $2,5 < n < 5$. Т.е. $n=3$ или $n=4$.

Пусть $n=3$. Тогда команды A, B, C, D, E и F набрали соответственно 8, 7, 6, 5, 4, 3 очка. Сумма очков равна 33. Тогда $33-30=3$ матча закончились победой одной из команд. Однако, команде A, чтобы набрать 8 очков в 5 матчах надо одержать не менее двух побед. Командам B и C (7 и 6 очков соответственно) надо одержать не менее, чем по одной победе. Итого, не менее чем 4 матча закончатся победой одной из команд. Противоречие.

Если $n = 4$, то команды A, B, C, D, E и F набрали соответственно 9, 8, 7, 6, 5, 4 очка. Ниже приведен пример такого турнира:

							Очков
A	***	3	3	1	1	1	9
B	0	***	1	1	3	3	8
C	0	1	***	3	3	0	7
D	1	1	0	***	1	3	6
E	1	0	0	1	***	3	5
F	1	0	3	0	0	***	4

5. Решение. На каждой грани куба первоначально было записано число 6. Покажем, что первоначальные числа не могли быть различными. Предположим противное. Пусть не все первоначальные числа были одинаковыми. Тогда хотя бы для одной вершины подсчитывалось среднее арифметическое различных чисел. Так как среднее арифметическое различных чисел меньше наибольшего из них, то наибольшее число заменялось меньшим. Тогда в конце преобразований это число не могло быть записано на грани. Противоречие с условием означает, что первоначальные числа были одинаковыми и равными 6.

Ответ: на каждой грани куба первоначально были записано число 6.

