

Intervalos en general

Un intervalo de la recta es un segmento o una semirrecta.

Los segmentos corresponden a los números reales comprendidos entre otros dos.

Las semirrectas son todos los números reales mayores o menores que un número dado.

Hay ocho tipos de intervalos:

Intervalo abierto (a, b) $[-1, 3] \Rightarrow -1 < x < 3$	Intervalo cerrado $[a, b]$ $[-1, 3] \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$	Semirrecta abierta positiva (a, ∞) $[2, \infty) \Rightarrow x > 2$	Semirrecta cerrada positiva $[a, \infty)$ $[2, \infty) \Rightarrow x \geq 2$
Intervalo abierto por la izquierda $(a, b]$ $[-1, 3] \Rightarrow -1 < x \leq 3$	Intervalo abierto por la derecha $[a, b)$ $[-1, 3] \Rightarrow -1 \leq x < 3$	Semirrecta abierta negativa $(-\infty, a)$ $(-\infty, 2] \Rightarrow x < 2$	Semirrecta cerrada negativa $(-\infty, a]$ $[-1, 2] \Rightarrow x \leq 2$

Los signos $\leq$ y $\geq$ nos indican que el extremo está incluido (intervalo cerrado) y los signos $<$ y $>$ que no está incluido (intervalo abierto)

Los corchetes nos indican que el extremo está incluido (intervalo cerrado) y los paréntesis que no está incluido (intervalo abierto)

Actividades resueltas

Representa en la recta real y expresa en forma de desigualdad el intervalo $(1, 3]$

Resolución



Resuelve las siguientes cuestiones:

a) ¿Pertenece el número -5 al intervalo $[-4, 1]$? **Resolución** No, porque -5 no está entre -4 y 1

b) ¿Cuántos números enteros hay en el intervalo $(-5, -3]$? **Resolución** Dos, -4 y -3

c) ¿Cuántos números reales tiene el intervalo $(6, 7)$? **Resolución** Infinitos

d) ¿Cuál de las siguientes semirrectas contiene al número -3 : $[-3, \infty)$ ó $(-3, \infty)$? **Resolución** $[-3, \infty)$

3) Completar el siguiente cuadro

Intervalo o semirrecta	Enunciado	Desigualdad	Representación gráfica
$[1, +\infty)$	Números reales mayores o iguales a 1	$x \geq 1$	$1 \text{-----} \rightarrow$
$(-\infty, -5)$	Números reales menores que -5	$x < -5$	
$[-1, 5)$	Números reales mayores o iguales que -1 y menores que 5	$x \geq 1$	
$[-1, 0]$	Números reales mayores o iguales que -1 y menores o iguales que 0	$\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 0\}$	$1 \text{-----} 1$ -1 0
$(2, 5]$	Números reales mayores que 2 y menores o iguales que 5	$2 < x \leq 5$	$0 \text{-----} 1$ 2 5
$(-\infty, 6]$	Números reales menores o iguales que 6	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 6\}$	$\leftarrow \text{-----} 1$ 6

Más actividades

Completa el siguiente cuadro

Solución:

Intervalo o semirrecta	Enunciado	Desigualdad	Representación gráfica
$[1, +\infty)$	Números reales mayores o iguales a 1	$x \geq 1$	$1 \text{-----} \rightarrow$
$(-\infty, -5)$	Números reales menores que -5	$x < -5$	
$[-1, 5)$	Números reales mayores o iguales que -1 y menores que 5	$x \geq 1$	
$[-1, 0]$	Números reales mayores o iguales que -1 y menores o iguales que 0	$\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 0\}$	$1 \text{-----} 1$ -1 0
$(2, 5]$	Números reales mayores que 2 y menores o iguales que 5	$2 < x \leq 5$	$0 \text{-----} 1$ 2 5
$(-\infty, 6]$	Números reales menores o iguales que 6	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 6\}$	$\leftarrow \text{-----} 1$ 6

Representa en la recta real y expresa en forma de desigualdad el intervalo (1, 3]

Resolución

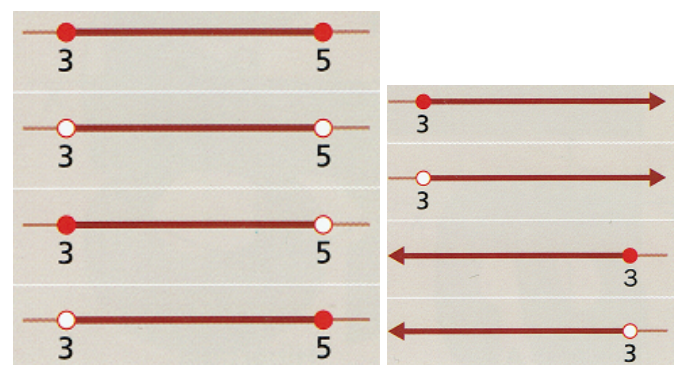
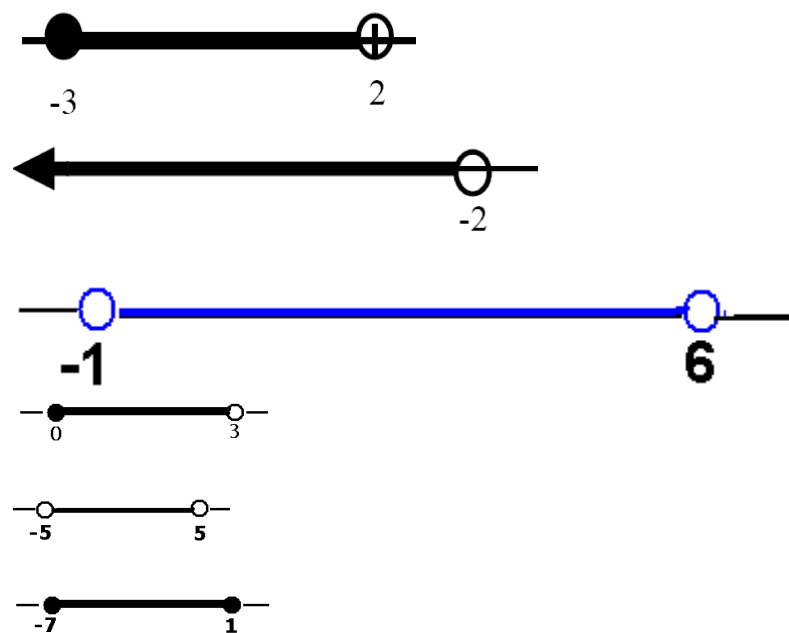


Representa gráficamente los siguientes intervalos y exprésalos con las distintas notaciones:

a) $-5 \leq x < 0$ *Segmento $[-5, 0)$ (se incluye -5 y se excluye el 0)*

- b) $x \leq 3$ *Semirrecta hacia la izquierda $(-\infty, 3]$ (se incluye el 3)*
- c) $[-3, 4)$ *Números x que cumplen $-3 \leq x < 4$ (se incluye -3 y se excluye el 4)*
- d) $(-2, \infty)$ *Semirrecta hacia la derecha de los números x que cumplen $-2 < x$ (o sea $x > -2$) (se excluye -2)*
- e) $(-5, -1]$ *Números x que cumplen $-5 < x \leq -1$ (se excluye -5 y se incluye el -1)*
- f) $x \leq -1$ *Semirrecta hacia la izquierda $(-\infty, -1]$ (se incluye el -1)*
- g) $-1 < x < 2$ *Segmento $(-1, 2)$ (se excluyen -1 y 2)*
- h) $(-\infty, 0]$ *Semirrecta hacia la izquierda de los números x que cumplen $x \leq 0$ (se incluye el 0)*
- i) $x \geq -1$ *Semirrecta hacia la derecha $[-1, \infty)$ (se incluye el -1)*
- j) $(-\infty, -10)$ *Semirrecta hacia la izquierda de los números x que cumplen $x < -10$ (se excluye el -10)*
- k) $x > 0$ *Semirrecta hacia la derecha $(0, \infty)$ (se excluye el 0)*
- l) $x \leq -1/2$ *Semirrecta hacia la izquierda $(-\infty, -1/2]$ (se incluye el $-1/2$)*
- a) $-4 \leq x < 2$ *Segmento $[-4, 2)$ (se incluye -4 y se excluye el 2)*
- b) $[-1, 3)$ *Números x que cumplen $-1 \leq x < 3$ (se incluye -1 y se excluye el 3)*
- c) $x > -2$ *Semirrecta hacia la derecha $(-2, \infty)$ (se excluye el -2)*
- d) $(-\infty, -1)$ *Semirrecta hacia la izquierda de los números x que cumplen $x < -1$ (se excluye el -1)*
- m) $[-5, -1]$ *Números x que cumplen $-5 \leq x \leq -1$ (se incluye -5 y -1)*
- n) $[3, 4)$ *Números x que cumplen $3 \leq x < 4$ (se incluye 3 y se excluye el 4)*
- ñ) $(-4, 2)$ *Números x que cumplen $-4 < x < 2$ (se excluyen -4 y 2)*
- o) $(1, \infty)$ *Semirrecta hacia la derecha de los números x que cumplen $1 < x$ (o sea $x > 1$) (se excluye el 1)*
- p) $-2 < x \leq 0$ *Segmento $(-2, 0]$ (se excluye -2 y se incluye el 0)*
- q) $x < 2$ *Semirrecta hacia la izquierda $(-\infty, 2)$ (se excluye el 2)*
- a) $\{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x < 0\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$
- c) $[-3, 4)$
- d) $(-2, \infty)$
- e) $(-5, -1]$
- f) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -1\}$
- g) $\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 2\}$
- h) $(-\infty, 0]$
- i) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$
- j) $(-\infty, -10)$
- k) $]-\infty, -1[$
- l) $[-2, 5]$
- d) Números menores o iguales que $-6/5$
 Los números que cumplen: $x > 0$
 d) Los números que cumplen: $x \leq -3$

Expresa con las distintas notaciones los intervalos:



Completa la siguiente tabla escribiendo la desigualdad o el intervalo. Indica si los números pertenecen o no pertenecen a los intervalos

		0	2	-1	-3	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{2}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$
	$-3 \leq x < \sqrt{2}$								
$[-2, 2]$									
	$-\pi < x < 5$								
$\left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$									
	$-\frac{5}{2} < x < \sqrt{5}$								
$[2, +\infty)$									

¿Qué tipos de intervalos existen?

Escribe, para cada intervalo, dos números que pertenezcan a él

$(0,1; 0,2)$

$(4,35; 4,36)$

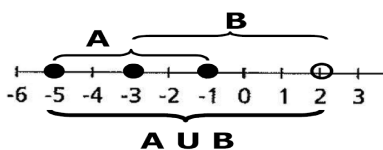
$(7,3015; 7,3016)$

$(-128,548; -128,547)$

$(-2,4891; -2,4890)$

Unión de intervalos

Es el conjunto formado por todos los puntos de ambos intervalos. La unión de dos intervalos A y B se representa por $A \cup B$ y se lee "A unión con B"



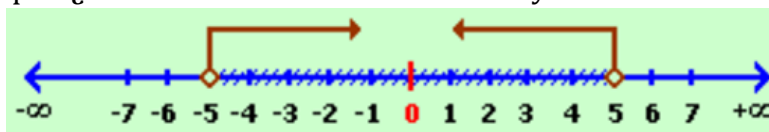
Ejemplo: Si $A = [-5, -1]$, $B = [-3, 2)$

$A \cup B = [-5, 2)$

Intervalos en forma de valor absoluto

(A) Números cuyo valor absoluto es menor que otro dado:

Empecemos con un ejemplo: ¿Cuáles son los números reales cuyo valor absoluto es menor que 5?



Observamos que son todos los números comprendidos entre -5 y 5:

$$|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5 \Leftrightarrow (-5, 5)$$

En general, $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow (-a, a)$

(B) Números cuyo valor absoluto es mayor que otro dado:

Veamos ahora: ¿cuáles son los números reales cuyo valor absoluto es mayor que 5?

Lógicamente, serían los que no están entre -5 y 5. Es decir, los mayores que 5 junto con los menores que -5

$$|x| > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ \text{ó} \\ x < -5 \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$$

. En general, $|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ \text{ó} \\ x < -a \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$

El símbolo $\cup$ significa unión ó junto con

Actividades

Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7\}$ $C: (-\infty, 1]$ $D = E(3; 7)$ $E = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

a) Representalos en la recta numérica y exprésalos de todas las formas posibles

Solución: Sólo voy a dar la expresión:

$$A = [-5, 5] = \{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x \leq 5\}$$

$$B = [3, 7)$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1\}$$

$$D = (3 - 7, 3 + 7) = (-4, 10) = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x < 10\} \quad E = (0, \infty)$$

b) Determina $A \cup B$ y $C \cap D$ **Solución:** $A \cup B = [-5, 7)$ $C \cap D = (-4, 1]$

Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 6\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$ representa de todas las formas posibles los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$

Resolución

$$A \rightarrow |x| < 6 \Leftrightarrow -6 < x < 6 \rightarrow (-6, 6) \quad B \rightarrow x \leq 2 \rightarrow (-\infty, 2]$$

$$A \cup B = (-\infty, 6) \rightarrow x < 6 \quad A \cap B = (-6, 2] \rightarrow -6 < x \leq 2$$

Expresa en forma de unión de intervalos $\{x \in \mathbb{R} / |x| > 4\}$ **Solución:** $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

Dados los conjuntos $A = (-2, +\infty)$, $B = (-2, 0]$ y $C = [0, 4)$

calcula $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$.

Solución: $A \cup B \cup C = (-2, \infty)$ $A \cap B \cap C = \{0\}$

Representa los siguientes intervalos con valor absoluto y exprésalos con las notaciones estudiadas:

a) $|x| < 5$ *Segmento $(-5, 5)$; $-5 < x < 5$, (se excluyen -5 y 5)*

b) $|x| \leq 4$ *Segmento $[-4, 4]$, $-4 \leq x \leq 4$ (se incluyen -4 y 4)*

c) $|x| \leq 1$ *Segmento $[-1, 1]$, $-1 \leq x \leq 1$, (se incluyen -1 y 1)*

d) $|x| < 1/3$ *Segmento $(-1/3, 1/3)$; $-1/3 < x < 1/3$, (se excluyen $-1/3$ y $1/3$)*

f) $\{x \in \mathbb{R} / |x| = 12\}$

Números n que cumplen $|n| \leq \frac{3}{2}$

números reales x que cumplen $|x + 3| \leq 2$

c) $|x - 5| < 2$

d) $|x - 2| \leq 4$

e) $|x + 1| < 5$

f) $|x + 1/3| < 2/5$

f) $\{x \in \mathbb{R} / |x - 4| \leq 3\}$

Expresa en forma de unión de intervalos y represéntalos en la recta

$\{x \in \mathbb{R} / |x| > 4\}$ $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

a) $|x| > 7$ $(-\infty, -7) \cup (7, \infty)$

b) $|x| \geq 1$ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

c) $|x| > 3/5$ $(-\infty, -3/5) \cup (3/5, \infty)$

Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$ representa de todas las formas posibles los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$

Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 6\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$ representa de todas las formas posibles los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$

Resolución

$$A \rightarrow |x| < 6 \Leftrightarrow -6 < x < 6 \rightarrow (-6, 6) \quad B \rightarrow x \leq 2 \rightarrow (-\infty, 2]$$

$$A \cup B = (-\infty, 6) \rightarrow x < 6 \quad A \cap B = (-6, 2] \rightarrow -6 < x \leq 2$$

Dados los intervalos:

A: números reales x que cumplen $|x| \leq 6$ B: números reales x que cumplen $-3 \leq x < 7$

C: $(-\infty, 2]$ D: números reales que cumplen $x > 1$

a) Representalos en la recta numérica y exprésalos de todas las formas posibles

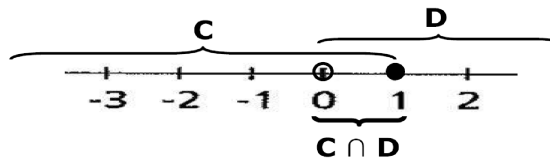
b) Determina $A \cup B$ y $C \cap D$

Dados los conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ y } x \leq \frac{15}{2} \right\}$; $B = \{ x \in \mathbb{R} / |x| \leq 5 \}$, halla:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

Intersección de intervalos

Es el conjunto formado por los puntos comunes a los intervalos. La intersección de dos intervalos A y B se representa por $A \cap B$ y se lee "A intersección con B"



Ejemplo: Si $C = (-\infty, 1]$, $D = (0, \infty)$

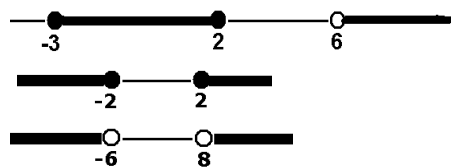
$$C \cap D = (0, 1]$$

Más actividades

Expresa de todas las formas los números que son comunes a los intervalos:

a) $[0, 4]$ y $(1, 7)$ b) $(-\infty, \sqrt{7})$ y $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Expresa en forma de unión de intervalos los conjuntos de números representados:



Actividades resueltas

1) Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Los números x tales que $-2 < x \leq 1$ corresponden al intervalo **Resolución** $(-2, 1]$

b) El intervalo $[9, \infty)$ corresponde a la expresión (selecciona)

1) $-9 \leq x$ 2) $-9 > x$ 3) $9 > x$ 4) $9 \leq x$

Resolución La opción 4)

c) $(-\infty, -1) \cup [-5, \infty)$ corresponde al intervalo ... **Resolución** R

d) $(-\infty, -1) \cap [-5, \infty)$ corresponde al intervalo ... **Resolución** $[-5, -1)$

e) Expresa en forma de unión de intervalos $\{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 4\}$ **Resolución** $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

2) Dados los intervalos: $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7\}$; $C: (-\infty, 1]$; $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

a) Exprésalos de todas las formas posibles

b) Determina $A \cup B$ y $C \cap D$

Resolución

a) $A: -5 \leq x \leq 5 \rightarrow [-5, 5]$ $B: [-3, 7)$ $C: (-\infty, 1] \rightarrow x \leq 1$ $D: (0, \infty)$

b) $A \cup B = [-5, 7)$ $C \cap D = (0, 1]$

3) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7\}$ $C = (-\infty, 1]$ $D = (-4, 10]$ $E = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

a) Exprésalos de todas las formas posibles

b) Determina $A \cup B$ c) Determina $C \cap D$

Resolución

a) $A = [-5, 5] \rightarrow -5 \leq x \leq 5$ $B = [3, 7)$ $C \rightarrow x \leq 1$ $D \rightarrow -4 < x \leq 10$ $E = (0, \infty)$ b) $(-5, 7]$ c) $(-4, 1]$

4) Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 6\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$ representa de todas las formas posibles los conjuntos $A, B, A \cup B$ y $A \cap B$

Resolución

$A: -6 < x < 6$; $(-6, 6)$ $B: (-\infty, 2]$ $A \cup B = (-\infty, 6)$, $x < 6$ $A \cap B = (-6, 2]$, $-6 < x \leq 2$

5) Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 9\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / x < 5\}$ representa de todas las formas posibles los conjuntos $A, B, A \cup B$ y $A \cap B$

Resolución

$A: -9 \leq x \leq 9$; $[-9, 9]$ $B: (-\infty, 5)$ $A \cup B = (-\infty, 9]$, $x \leq 9$ $A \cap B = [-9, 5)$, $-9 \leq x < 5$

6) Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 4\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -3\}$ representa de todas las formas posibles los conjuntos $A, B, A \cup B$ y $A \cap B$

Resolución

$A: -4 < x < 4$; $(-4, 4)$ $B: [-3, \infty)$ $A \cup B = (-4, \infty)$, $x > -4$ $A \cap B = [-3, 4)$, $-3 \leq x < 4$

7) Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 7\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2\}$ representa de todas las formas posibles los conjuntos A , B , $A \cup B$ y $A \cap B$

Resolución

$$A: -7 < x < 7; (-7, 7) \quad B: (-\infty, -2] \quad A \cup B = (-\infty, 7), \quad x < 7 \quad A \cap B = (-7, -2], \quad -7 < x \leq -2$$

8) Calcula la unión e intersección de los intervalos A y B en los casos:

a) $A = (-3, 5)$ $B: 1 \leq x \leq 7$ b) $A = (-5, \infty)$ $B = (-\infty, 0]$

c) $A = [3, \infty)$ $B = (5, \infty)$ d) $A = [3, \infty)$ $B = (-\infty, 3]$

Resolución

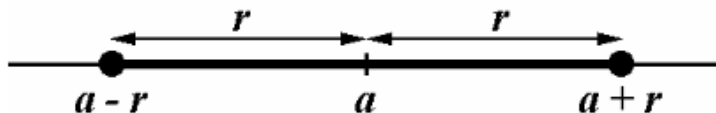
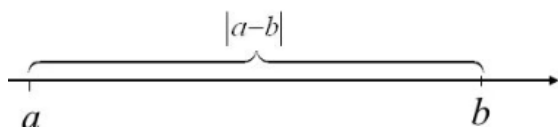
a) $A \cup B = (-3, 7]$ $A \cap B = [1, 5)$ b) $A \cup B = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ $A \cap B = (-5, 0]$

c) $A \cup B = [3, +\infty) = \mathbb{R}$ $A \cap B = (5, +\infty)$ d) $A \cup B = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ $A \cap B = \{3\}$

Entorno de un punto

Veamos primero cómo se calcula la distancia entre dos números a y b , que se escribe $d(a, b)$:

$$d(a, b) = |a - b|$$

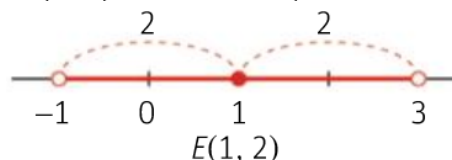


$$E[a, r] = [a - r, a + r]$$

Ejemplo: La distancia entre -5 y 4 es $d(-5, 4) = |-5 - 4| = |-9| = 9$ unidades

Sea un intervalo (a, b) , $m = \frac{a+b}{2}$ su punto medio y $r = \frac{d(a,b)}{2} = \frac{b-a}{2}$ su radio

Se llama entorno de centro m y radio r y se representa por $E(m, r)$ al intervalo $(m - r, m + r)$



Ejemplo: $E(1, 2) = (1 - 2, 1 + 2) = (-1, 3)$

Actividades

Escribe en forma de entorno los siguientes intervalos: a) $(2,75 ; 7,25)$ b) $(-4 , 9)$

a) centro del entorno $= m = \frac{2,75 + 7,25}{2} = 5$; radio $= r = \frac{7,25 - 2,75}{2} = 2,25 \Rightarrow E(5; 2,25)$

Solución:

b) centro del entorno $= m = \frac{-4 + 9}{2} = 2,5$; radio $= r = \frac{9 - (-4)}{2} = 6,5 \Rightarrow E(2,5; 6,5)$

Escribe en forma de entorno los siguientes intervalos:

$(2,75 ; 7,25)$

$(-4 , 9)$

$(3 , 8)$

$(0 ; 7,3)$

$(-3,45 ; 2,5)$

Halla la longitud, el centro y el radio de los siguientes intervalos y exprésalos en forma de entorno:

- a) $(3, 8)$
- b) $(2,75; 7,25)$
- c) $(-4, 9)$
- d) $(a - 3, a + 3)$
- e) $(0; 7,3)$
- f) $(-3,45; 2,5)$
- g) $[1/5, 4]$
- c) $[-b, b]$
- b) $-5 \leq x \leq -1$
- d) $|x + 5| \leq 0,75$
- e) $|x - 3| < 2/5$

Expresa los siguientes conjuntos como entornos:

- a) $A = (2,5)$
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} / |x - 3| < 5\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} / |x + 2| < 3\}$

Si $A = E(2,3)$, y $B = E(5,7)$, halla $A \cup B$ y $A \cap B$.

VARIADO

Estudia la acotación de los siguientes conjuntos, y determina, si existen, el máximo, mínimo, supremo e ínfimo.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$
- b) $B = \left\{ \frac{1}{2^n}; n \in \mathbb{N} \right\}$
- c) $C = \{(-1)^n; n \in \mathbb{N}\}$

