

ENSAM 1995: Problème n°3: Circuits industriels en courant alternatif:

1. La puissance active est: $P = \frac{1}{T} \int v \cdot i \cdot dt = \frac{1}{T} \int 2VI \sin(\omega t + \alpha) \cdot \sin(\omega t + \alpha - j) \cdot dt$;

$$\text{soit: } P = \frac{VI}{T} \int_0^T \cos \varphi - \cos(\omega t + 2\alpha - \varphi) dt \quad \text{donc: } P = VI \cos \varphi$$

2.1.1. Il va de soi qu'en notation complexe: $\underline{Z}_g = r + j\omega L$ et $\underline{Z}_r = R + jX$ (par définition de la réactance X).

Le circuit est un circuit en série, on a donc: $\underline{E} = \underline{Z}_g \underline{I} + \underline{Z}_r \underline{I}$, ce qui se traduit par: $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{r + R + j(X + \omega L)}$

2.1.2. De même: $\underline{V} = \underline{Z}_r \underline{I}$ donne: $\underline{V} = \frac{R + jX}{r + R + j(X + \omega L)} \underline{E}$

2.1.3. Par définition: $\underline{P} = \underline{U} \cdot \bar{\underline{I}} = P + jQ$ où: $\underline{P}$ est la puissance complexe et $\bar{\underline{I}}$ le complexe conjugué de $\underline{I}$.

$$\text{On a ainsi: } P + jQ = \frac{(R + jX) \cdot E^2}{(r + R)^2 + (X + \omega L)^2} \text{ soit: } P = \frac{RE^2}{(r + R)^2 + (X + \omega L)^2} \text{ et: } Q = \frac{XE^2}{(r + R)^2 + (X + \omega L)^2}$$

2.2. On a maintenant: $\underline{Z}_r = R + jL\omega$ c'est-à-dire $X = L\omega$. Les applications numériques donnent les valeurs suivantes: $I = 391 \text{ A}$; $V = 215 \text{ V}$; $P = 42,0 \text{ kW}$ et $Q = 73,0 \text{ kvar}$. On rappelle que $1 \text{ var} = 1 \text{ volt ampère réactif} = 1 \text{ W}$ mais la notation est réservée aux puissances réactives.

2.3.1. Il est clair que: $W_L = \frac{1}{2} L \cdot I_{\max}^2$ mais $I_{\max} = I \cdot \sqrt{2}$ donc: $W_L = L \cdot I^2$

2.3.2. Nous avons donc: $W_L = \frac{LE^2}{(r + R)^2 + (L\omega + \omega L)^2}$ alors que: $Q = \frac{L\omega E^2}{(r + R)^2 + (L\omega + \omega L)^2}$ ainsi: $W_L = \frac{Q}{\omega}$. Q est la puissance consommée dans l'inductance L.

3.1. On veut que $U' = E = 220 \text{ V}$, donc: $E' = E \cdot \sqrt{\frac{(r + R)^2 + (L\omega + \omega L)^2}{R^2 + L^2 \omega^2}} = 225 \text{ V}$. On a alors: $I' = \frac{E' \cdot I}{E} = 399 \text{ A}$.

Et en ce qui concerne les puissances: $P' = \frac{E'^2 \cdot P}{E^2} = 43,8 \text{ kW}$ et: $Q' = \frac{E'^2 \cdot Q}{E^2} = 76,1 \text{ kvar}$. Enfin: $\cos \varphi = \frac{P'}{U' \cdot I'} = 0,499$

3.2. U' et I' étant proportionnels à E' , on a: $\frac{\Delta U'}{U'} = \frac{\Delta I'}{I'} = 5\%$.

Par contre, P' et Q' sont proportionnels à E'^2 donc: $\frac{\Delta P'}{P'} = \frac{\Delta Q'}{Q'} = 10,25\%$

4. Si on néglige $\underline{Z}_g$ on obtient des expressions plus simples: $\underline{V} = \underline{E}$; $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + jL\omega}$; $P = \frac{RE^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$ et $Q = \frac{L\omega E^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$. Les applications numériques donnent alors:

$I = 399 \text{ A}$ au lieu de 391 A , soit une précision $\frac{\Delta I}{I} = 2,12\%$; $V = 220 \text{ V}$ au lieu de 215 V , soit une précision $\frac{\Delta U}{U} = 2,12\%$;

$P = 43,8 \text{ kW}$ au lieu de $42,0 \text{ kW}$, soit une précision $\frac{\Delta P}{P} = 4,29\%$

et $Q = 76,1 \text{ kvar}$ au lieu de $73,0 \text{ kvar}$, soit une précision $\frac{\Delta Q}{Q} = 4,29\%$

5.1. On a: $e_1 + e_2 + e_3 = E\sqrt{2}\left[\sin\omega t + \sin\left(\omega t - \frac{2p}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4p}{3}\right)\right]$; soit après calculs: $e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad \forall t$

5.2. Utilisons ici le théorème de superposition des états d'équilibre, en effet le circuit est totalement symétrique et il devient très simple lorsqu'on éteint deux sources sur trois: si on éteint les générateurs 2 et 3 (on rappelle qu'éteindre une source de tension équivaut à la remplacer par un fil) en ne gardant que le premier générateur on a deux impédances $\frac{Z_r}{2}$ en parallèle (donc équivalentes à $\frac{Z_r}{2}$) en série avec $\frac{Z_r}{2}$, le générateur débite donc dans une impédance $\frac{3Z_r}{2}$. On peut donc affirmer que: $I_1 = -2I_2 = -2I_3 = \frac{2E_1}{3Z_r}$ lorsque seule la source 1 est opérationnelle. Il est bien évident que le courant se partage équitablement entre la branche 2 et la branche 3 puisqu'il y a la même impédance dans chaque branche, le signe provient de l'orientation des courants.

Lorsqu'on fait la même opération avec les générateurs 2 et 3, on obtient évidemment les mêmes résultats (aux phases et orientations près). On obtient donc finalement: $i_1 = \frac{2E\sqrt{2}}{3\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\left[\sin(\omega t - j) - \frac{1}{2}\sin\left(\omega t - \frac{2p}{3} - j\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\omega t - \frac{4p}{3} - j\right)\right]$

avec $j = \text{Arg}\left(\frac{E_1}{I_1}\right) = \text{Arg}\left(\frac{3Z_r}{2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$ donc: $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Les phases des autres courants sont identiques.

Après calculs on obtient: $i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi)$ donc: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 399 \text{ A}$

Par ailleurs: $\underline{V_N} - \underline{V_M} = \underline{E_1} - \underline{Z_r} \cdot \underline{I_1} = E - \frac{2}{3}E$ d'où: $V_N - V_M = \frac{E}{3} = 73,3 \text{ V}$

De plus: $P_t = P_1 + P_2 + P_3$ donc: $P_t = \frac{3RE^2}{R^2 + L^2\omega^2} = 131 \text{ kW}$ et: $Q_t = Q_1 + Q_2 + Q_3$ soit: $Q_t = \frac{3L\omega E^2}{R^2 + L^2\omega^2} = 228 \text{ k var}$

5.3. S'il se produit une coupure de circuit en A_3 , alors tout se passe comme si la troisième branche du circuit n'existait plus, le courant $i_3 = 0$. On a donc un simple circuit série avec deux générateurs en opposition et deux impédances $\frac{Z_r}{2}$. Les conventions d'orientation imposent alors: $i_2 = -i_1$.

On a par ailleurs: $\underline{E_1} - \underline{E_2} = 2\underline{Z_r} \cdot \underline{I_1}$ donc: $i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi)$ avec $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Après calculs, on obtient: $i_1 = \frac{E\sqrt{6}}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi')$ avec $\varphi' = \frac{\pi}{6}$. Soit: $I_1 = I_2 = \frac{E\sqrt{3}}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 346 \text{ A}$

Le calculs des puissances est similaire au précédent: $P_t' = P_1 + P_2 = 2R \frac{E\sqrt{3}}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$ c'est-à-dire:

$P_t' = \frac{3RE^2}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot \frac{1}{2} = 65,7 \text{ kW}$ $Q_t' = \frac{3L\omega E^2}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot \frac{1}{2} = 114 \text{ k var}$

. De même:

Enfin, on a: $\underline{V_N} - \underline{V_M} = \underline{E_1} - \underline{Z_r} \cdot \underline{I_1} = \frac{E_1 + E_2}{2}$; donc: $V_N - V_M = \frac{E\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t + \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})) = \frac{E\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{3})$

On a donc: $V_N - V_M = 110 \text{ V}$

5.4. On a maintenant $V_N - V_M = 0$ donc chaque branche est équivalente, à un déphasage près. Etudions la première branche:

$\underline{E_1} - \underline{Z_r} \cdot \underline{I_1} = 0$ donc: $i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi)$ avec $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Ainsi: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 399 \text{ A}$

Par ailleurs: $P_t = 3P_1 = \frac{3RE^2}{R^2 + L^2\omega^2} = 131 \text{ kW}$ et $Q_t = \frac{3L\omega E^2}{R^2 + L^2\omega^2} = 228 \text{ k var}$

Si on coupe le circuit en A_3 , les courants i_1 et i_2 sont inchangés, et $i_3 = 0$. donc: $P_t' = \frac{2}{3}P_t = 87,7 \text{ kW}$ et $Q_t' = \frac{2}{3}Q_t = 152 \text{ k var}$

6. Utilisons ici encore le théorème de superposition, quand on éteint les sources 2 et 3, le circuit est équivalent au circuit ci-contre:

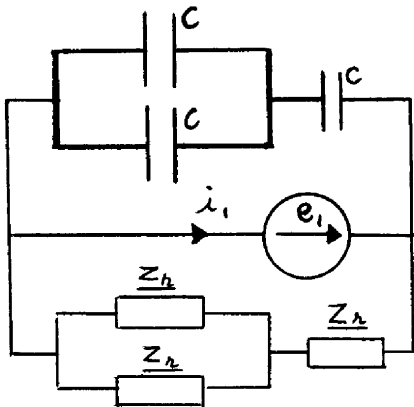
Donc tout se passe comme si le générateur débitait dans

une impédance $\underline{Z}$ telle que: $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{2}{3\underline{Z}_r} + \frac{2jC\omega}{3}$ soit:

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{2}{3} \frac{-LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}$$

Par ailleurs, la symétrie du circuit permet d'affirmer que:

$$\underline{I}_1 = -2\underline{I}_2 = -2\underline{I}_3 = \frac{E_1}{\underline{Z}}$$



Ainsi:
$$i_1 = \frac{2E\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{-LC\omega^2 + R^2C^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \varphi''\right) \frac{1}{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi''\right) \frac{1}{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi''\right)$$
 ce qui se simplifie en:

$$i_1 = E\sqrt{2} \sqrt{\frac{-LC\omega^2 + R^2C^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \varphi''\right) \quad ; \text{ on en déduit: } I_1 = I_2 = I_3 = E \sqrt{\frac{-LC\omega^2 + R^2C^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}} = 308 \text{ A}$$

$$\varphi'' = \text{Arg} \underline{Z} = \text{Arc tan} \frac{L\omega}{R} - \text{Arc tan} \frac{RC\omega}{-LC\omega^2} = 49,8^\circ$$

Par ailleurs, ; le facteur de puissance est donc: $\cos \varphi'' = 0,646$

On trouve alors aisément les puissances: $P_t'' = 3E \cdot I_1 \cdot \cos \varphi'' = 131 \text{ kW}$ et $Q_t'' = 3E \cdot I_1 \cdot \sin \varphi'' = 155 \text{ k var}$.

On remarque que: $P_t'' = P_t$; $Q_t'' < Q_t$; I_1 a augmenté de même que $\cos \varphi''$. On dissipe donc moins d'énergie dans les parties réactives (les inductances ici).