ENSAM 1995: Problème n°3: Circuits industriels en courant alternatif:

1. La puissance active est: $P = \frac{1}{T}\int v.i.dt = \frac{1}{T}\int 2VI\sin(wt + \alpha).\sin(wt + \alpha - j).dt$;

soit: $P = \frac{VI}{T}\left[\cos\varphi - \cos(\omega t + 2\alpha - \varphi)\right]_0^T dt$ donc: $P = VI\cos\varphi$

2.1.1. Il va de soi qu'en notation complexe: $\underline{Zg} = r + j\omega$ et $\underline{Zr} = R + jX$ (par définition de la réactance X).

Le circuit est un circuit en série, on a donc: $\underline{E} = \underline{Zg} + \underline{Zr}\,\underline{I}$, ce qui se traduit par: $\underline{I} = \frac{E}{r + R + j(X + \omega)}$

2.1.2. De même: $\underline{V} = \underline{Zr}.\underline{I}$ donne: $\underline{V} = \frac{(R + jX)E}{r + R + j(X + \omega)}$

2.1.3. Par définition: $\underline{P} = \underline{U}.\overline{\underline{I}} = P + jQ$ où: $\underline{P}$ est la puissance complexe et $\overline{\underline{I}}$ le complexe conjugué de $\underline{I}$.

On a ainsi: $P + jQ = \frac{(R+jX).E^2}{(r+R)^2+(X+lw)^2}$ soit: $P = \frac{RE^2}{(r+R)^2+(X+lw)^2}$ et: $Q = \frac{XE^2}{(r+R)^2+(X+lw)^2}$

2.2. On a maintenant: $\underline{Zr} = R + jL\omega$ c'est-à-dire X=Lω. Les applications numériques donnent les valeurs suivantes: I = 391 A ; V = 215 V ; P = 42,0 kW et Q = 73,0 kvar. On rappelle que 1 var = 1 volt ampère réactif = 1 W mais la notation est réservée aux puissances réactives.

2.3.1. Il est clair que: $W_L = \frac{1}{2}L.I_{max}^2$ mais $I_{max} = I.\sqrt{2}$ donc: $W_L = L.I^2$

2.3.2. Nous avons donc: $W_L = \frac{LE^2}{(r+R)^2+(Lw+lw)^2}$ alors que: $Q = \frac{LwE^2}{(r+R)^2+(Lw+lw)^2}$ ainsi: $W_L = \frac{Q}{\omega}$. Q est la puissance consommée dans l'inductance L.

3.1. On veut que U' = E = 220 V, donc: $E' = E.\sqrt{\frac{(r+R)^2+(Lw+lw)^2}{R^2+L^2w^2}} = 225V$. On a alors: $I' = \frac{E'.I}{E} = 399\,A$.

Et en ce qui concerne les puissances: $P' = \frac{E'^2.P}{E^2} = 43,8\,kW$ et: $Q' = \frac{E'^2.Q}{E^2} = 76,1\,k\,var$. Enfin: $\cos\varphi = \frac{P'}{U'.I'} = 0,499$

3.2. U' et I' étant proportionnels à E', on a: $\frac{\Delta U'}{U'} = \frac{\Delta I'}{I'} = 5\%$.

Par contre, P' et Q' sont proportionnels à E'² donc: $\frac{\Delta P'}{P'} = \frac{\Delta Q'}{Q'} = 10,25\%$

4. Si on néglige $\underline{Zg}$ on obtient des expressions plus simples: $\underline{V} = E$; $\underline{I} = \frac{E}{R + jL\omega}$; $P = \frac{RE^2}{R^2 + L^2\omega^2}$ et $Q = \frac{L\omega E^2}{R^2 + L^2\omega^2}$.

les applications numériques donnent alors:

I = 399 A au lieu de 391 A, soit une précision $\frac{\Delta I}{I} = 2,12\%$; V = 220 V au lieu de 215 V, soit une précision $\frac{\Delta U}{U} = 2,12\%$;

P = 43,8 kW au lieu de 42,0 kW, soit une précision $\frac{\Delta P}{P} = 4,29\%$

et Q = 76,1 kvar au lieu de 73,0 kvar, soit une précision $\frac{\Delta Q}{Q} = 4,29\%$

5.1. On a: $e_1 + e_2 + e_3 = E\sqrt{2}\left[sinwt + sin\left(wt - \frac{2p}{3}\right) + sin\left(wt - \frac{4p}{3}\right)\right]$; soit après calculs: $e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad \forall t$

5.2. Utilisons ici le théorème de superposition des états d'équilibre, en effet le circuit est totalement symétrique et il devient très simple lorsqu'on éteint deux sources sur trois: si on éteint les générateurs 2 et 3 (on rappelle qu'éteindre une source de tension équivaut à la remplacer par un fil) en ne gardant que le premier générateur on a deux impédances $\underline{Zr}$ en parallèle (donc équivalentes à $\frac{\underline{Zr}}{2}$) en série avec $\underline{Zr}$, le générateur débite donc dans une impédance $\frac{3\underline{Zr}}{2}$. On peut donc affirmer que: $\underline{I_1} = -2\underline{I_2} = -2\underline{I_3} = \frac{2\underline{E_1}}{3\underline{Zr}}$ lorsque seule la source 1 est opérationnelle. Il est bien évident que le courant se partage équitablement entre la branche 2 et la branche 3 puisqu'il y a la même impédance dans chaque branche, le signe provient de l'orientation des courants.
Lorsqu'on fait la même opération avec les générateurs 2 et 3, on obtient évidemment les mêmes résultats (aux phases et orientations près). On obtient donc finalement: $i_1 = \frac{2E\sqrt{2}}{3\sqrt{R^2+L^2w^2}}\left[sin(wt - j) - \frac{1}{2}sin\left(wt - \frac{2p}{3} - j\right) - \frac{1}{2}sin\left(wt - \frac{4p}{3} - j\right)\right]$

avec $j = Arg\left(\frac{\underline{E_1}}{\underline{I_1}}\right) = Arg\left(\frac{3\underline{Zr}}{2}\right) = Arctan\left(\frac{Lw}{R}\right)$ donc: $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Les phases des autres courants sont identiques.

Après calculs on obtient: $i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi)$ donc: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 399\,A$

Par ailleurs: $\underline{V_N} - \underline{V_M} = \underline{E_1} - \underline{Zr}.\underline{I_1} = E - \frac{2}{3}E$ d'où: $v_N - v_M = \frac{E}{3} = 73{,}3\,V$

De plus: $P_t = P_1 + P_2 + P_3$ donc: $P_t = \frac{3RE^2}{R^2 + L^2\omega^2} = 131\,kW$ et: $Q_t = Q_1 + Q_2 + Q_3$ soit: $Q_t = \frac{3L\omega E^2}{R^2 + L^2\omega^2} = 228\,k\,var$

5.3. S'il se produit une coupure de circuit en A_3, alors tout se passe comme si la troisième branche du circuit n'existait plus, le courant $i_3 = 0$. On a donc un simple circuit série avec deux générateurs en opposition et deux impédances $\underline{Zr}$. Les conventions d'orientation imposent alors: $i_2 = - i_1$.

On a par ailleurs: $\underline{E_1} - \underline{E_2} = 2\underline{Zr}.\underline{I_1}$ donc: $i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right]$ avec $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Après calculs, on obtient: $i_1 = \frac{E\sqrt{6}}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi')$ avec $\varphi' = \frac{\pi}{6}$. Soit: $I_1 = I_2 = \frac{E\sqrt{3}}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 346\,A$

Le calculs des puissances est similaire au précédent: $P_t' = P_1 + P_2 = 2R\left(\frac{E\sqrt{3}}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\right)^2$ c'est-à-dire: $P_t' = \frac{3RE^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)} = \frac{P_t}{2} = 65{,}7\,kW$ $Q_t' = \frac{3L\omega E^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)} = \frac{Q_t}{2} = 114\,k\,var$.

Enfin, on a: $\underline{V_N} - \underline{V_M} = \underline{E_1} - \underline{Zr}.\underline{I_1} = \frac{\underline{E_1} + \underline{E_2}}{2}$; donc: $v_N - v_M = \frac{E\sqrt{2}}{2}\left[\sin\omega t + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{E\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$.

On a donc: $V_N - V_M = 110\,V$

5.4. On a maintenant $v_N - v_M = 0$ donc chaque branche est équivalente, à un déphasage près. Etudions la première branche: $\underline{E_1} - \underline{Zr}.\underline{I_1} = 0$ donc: $i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi)$ avec $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Ainsi: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 399\,A$

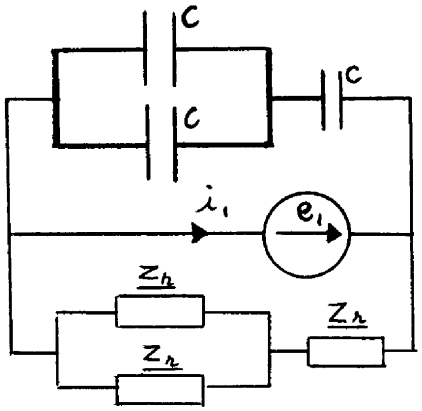
Par ailleurs: $P_t = 3P_1 = \frac{3RE^2}{R^2 + L^2\omega^2} = 131\,kW$ et $Q_t = \frac{3L\omega E^2}{R^2 + L^2\omega^2} = 228\,k\,var$.

Si on coupe le circuit en A_3, les courants i_1 et i_2 sont inchangés, et $i_3 = 0$. donc: $P_t' = \frac{2}{3}P_t = 87{,}7\,kW$ et $Q_t' = \frac{2}{3}Q_t = 152\,k\,var$.

6. Utilisons ici encore le théorème de superposition, quand on éteint les sources 2 et 3, le circuit est équivalent au circuit ci-contre:

Donc tout se passe comme si le générateur débitait dans une impédance $\underline{Z}$ telle que: $\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{2}{3\underline{Zr}}+\frac{2jC\omega}{3}$ soit: $\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{2(1-LC\omega^2+jRC\omega)}{3(R+jL\omega)}$.

Par ailleurs, la symétrie du circuit permet d'affirmer que: $\underline{I_1}=-2\underline{I_2}=-2\underline{I_3}=\frac{\underline{E_1}}{\underline{Z}}$



Ainsi: $i_1=\frac{2E\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{(1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2}}\left[\sin(\omega t-\varphi")-\frac{1}{2}\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}-\varphi"\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}-\varphi"\right)\right]$ ce qui se simplifie en:

$i_1=E\sqrt{2}\sqrt{\frac{(1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2}}\sin(\omega t-\varphi")$; on en déduit: $I_1=I_2=I_3=E\sqrt{\frac{(1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2}}=308\,A$

Par ailleurs, $\varphi"=\mathrm{Arg}(\underline{Z})=\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{L\omega}{R}\right)-\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right)=49,8°$; le facteur de puissance est donc: $\cos\varphi"=0,646$

On trouve alors aisément les puissances: $P_t"=3E.I_1.\cos\varphi"=131\,kW$ et $Q_t"=3E.I_1.\sin\varphi"=155\,k\,var$.

On remarque que: $P_t"=P_t\,;Q_t"<Q_t$; I_1 a augmenté de même que $\cos\varphi"$. On dissipe donc moins d'énergie dans les parties réactives (les inductances ici).