

Тема уроку: Біном Ньютона.

Мета уроку: Познайти учнів з біномом Ньютона, властивостями біноміальних коефіцієнтів.

I. Перевірка домашнього завдання.

Задача 1. У речовій лотереї розігруються 5 предметів. Перший, хто підійшов до урни, виймає з неї 5 білетів. Яким числом способів він може їх вийняти, щоб три з них виявились виграшними, якщо в урні 100 білетів.

Розв'язання:

$$n = C_5^3 \cdot C_{95}^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{95 \cdot 94}{1 \cdot 2} = 10 \cdot 95 \cdot 47 = 44\,650.$$

Питання до класу.

- 1) Скількома способами можна вийняти три виграшних білети з п'яти виграшних?
- 2) Скількома способами можна вийняти два неиграшних білети із всіх неиграшних?
- 3) Яким правилом слід скористатися для знаходження кількості способів вибору 5 білетів (3 виграшних і 3 неиграшних)?

Задача 2.

Шістнадцять екскурсантів розподілились на дві різні групи для розшуку товариша, який заблукав. Серед них є лише 4, хто знайомий з місцевістю. Яким числом способів вони можуть розділитися так, щоб у кожную групу ввійшли дві особи, які знають місцевість.

Розв'язання:

$$n = \frac{1}{2} C_4^2 \cdot C_{12}^6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 924 = 2772.$$

Питання до класу.

- 1) Скількома способами можна вибрати дві особи, які знають місцевість?
- 2) Скількома способами можна вбрати 6 екскурсантів групи, які не знайомі з місцевістю?
- 3) Чому загальна кількість розподілу екскурсантів на дві групи вдвічі менша $C_4^2 \cdot C_{12}^6$?

Задача 3.

Будівельна організація виділила на допомогу підшефному дитячому будинку бригаду з 5 робітників. В організації працюють 20 робітників, тому числі 5 мулярів, 4 теслярів і два штукатури. Яким числом способів можна укомплектувати бригаду щоб вона складалась з робітників усіх цих спеціальностей по одному?

Розв'язання:

$$n = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot C_9^2 = 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 40 \cdot 36 = 1440.$$

Питання до класу.

- 1) Скількома способами можна вибрати одного муляра?
- 2) Скількома способами можна вибрати одного тесляра?
- 3) Скількома способами можна вибрати одного штукатура?
- 4) Скількома способами можна вибрати двох робітників?
- 5) Яким правилом слід скористатися для знаходження числа способів укомплектування бригади з 5 чоловік?

II. Сприймання і усвідомлення матеріалу про біном Ньютона.

Вам відомі формули:

$$(a + b)^0 = 1 \text{ (при умові } a + b \neq 0);$$

$$(a + b)^1 = a + b;$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \text{ Неважко обчислити, що:}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 \cdot (a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b) = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + ab^3 + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Відразу кидається в вічі та обставина, що коефіцієнти в правих частинах цих формул дорівнюють числам із відповідних рядків трикутника Паскаля.

Виявляється, що для кожного натурального n є правильна і загальна формула:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + C_n^n b^n,$$

яка називається формулою бінома (двочлена) Ньютона, на честь англійського фізика і математика Ісаака Ньютона (1643—1727).

Доведення

За означенням степеня з натуральним показником маємо:

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \cdot (a + b) \cdot \dots \cdot (a + b)}_{n \text{ множників}}$$

Перемноживши n раз послідовно $a+b$ одержимо суму 2^n доданків виду $d_1 d_2 \dots d_n$, де d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) дорівнює або a , або b .

Розіб'ємо всі доданки на $(n + 1)$ групи $B_0, B_1 \dots B_n$, віднісши до B_m всі ті доданки, в яких b зустрічається множителем m раз, а a - $(n - m)$ раз. Число доданків у B_m дорівнює C_n^m (таким числом способів серед n множників $d_1 d_2 \dots d_n$ можна вибрати m множників, які дорівнюють b), а кожен доданок B_m дорівнює $a^{n-m}b^m$. Тому

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + C_n^n b^n,$$

де C_n^m — число комбінацій з n елементів по m елементів, причому ці числа мають ще одну назву — біноміальні коефіцієнти. Праву частину останньої формули називають біноміальним розкладом або розкладом бінома.

Розглянемо основні наслідки із формули Ньютона.

1. В розкладі $(a + b)^n$ міститься $(n + 1)$ доданків.
2. В формулі Ньютона показники степеня a спадають від n до 0, а показники степеня при b зростають від 0 до n . Сума показників при a і b в будь-якому доданку розкладу дорівнює n — показнику степеня бінома.
3. Біноміальні коефіцієнти, рівновіддалені від кінців розкладу, рівні між собою (оскільки $C_n^m = C_n^{n-m}$).
4. Загальний член розкладу (позначимо його T_{m+1}) має вигляд

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m, \text{ де } m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

5. Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n .

$$\text{Дійсно: } C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^m + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n.$$

Розглянемо розв'язування задач.

1. Піднесіть до шостого степеня $x - 2y$.

Розв'язання

Покладемо $a = x$, $b = -2y$, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} (x - 2y)^6 &= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5(-2y) + C_6^2 x^4(-2y)^2 + C_6^3 x^3(-2y)^3 + C_6^4 x^2(-2y)^4 + \\ &+ C_6^5 x(-2y)^5 + C_6^6 (-2y)^6 = 1 \cdot x^6 + 6x^5(-2y) + 15x^4 \cdot 4y^2 + 20x^3(-8y^3) + 15x^2 \cdot 16y^4 + \\ &+ 6x(-32y^5) + 1 \cdot 64y^6 = x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 192xy^5 + 64y^6. \end{aligned}$$

2. Знайдіть 13-й член розкладу бінома $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{15}$.

Розв'язання

Згідно формули загального члена розкладу бінома маємо:

$$T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12} (\sqrt[3]{3})^3 (\sqrt{2})^{12} = C_{15}^3 \cdot 3 \cdot 2^6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 2^6 = 87 \text{ 360}.$$

Отже, $T_{13} = 87 \text{ 360}$.

3. Знайдіть номер члена розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$, який не містить x .

Розв'язання

Для загального члена розкладу маємо:

$$T_{m+1} = C_{16}^m (\sqrt[3]{x})^{16-m} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^m = C_{16}^m x^{\frac{16-m}{3}} x^{-m} = C_{16}^m x^{\frac{16-4m}{3}}$$

Член розкладу не залежить від x , це означає, що показник степеня x дорівнює 0, тобто $\frac{16-4m}{3} = 0$, звідси $m = 4$.

Отже, п'ятий член даного розкладу не залежить від x .

III. Розв'язування вправ.

Задача 1. Піднесіть до шостого степеня $x - 2y$.

Розв'язання:

Покладемо $a = x$, $b = -2y$, тоді отримаємо

$$\begin{aligned}(a + b)^6 &= (x - 2y)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5(-2y) + C_6^2 x^4(-2y)^2 + C_6^3 x^3(-2y)^3 + C_6^4 x^2(-2y)^4 + C_6^5 x(-2y)^5 + \\&+ C_6^6 (-2y)^6 = 1 \cdot x^6 + 6x^5(-2y) + 15x^4 - 4y^2 + 20x^3(-8y^3) + 15x^2 \cdot 16y^4 + 6x(-32y^5) + 1 \\&\cdot 64y^6 = \\&= x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 192xy^5 + 64y^6.\end{aligned}$$

Відповідь: $x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 192xy^5 + 64y^6$.

Задача 2. Знайдіть 13-й член розкладу бінома $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{15}$.

Розв'язання:

Згідно з формулою загального члена розкладу бінома маємо $T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12} (\sqrt[3]{3})^3 \cdot 3 \cdot 2 (\sqrt{2})^{12} = C_{15}^3 \cdot 3 \cdot 2^6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 2^6 = 87360$.

Отже $= 87\,360$.

Відповідь: $T_{13} = 87\,360$.

IV. Підведення підсумків уроку.

V. Домашнє завдання.

- 1) Теорія;
- 2) Задача:

Знайдіть номер члена розкладу бінома $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x})^{16}$, який не містить x .

Розв'язання:

Для загального члена розкладу маємо $T_{m+1} = C_{16}^m (\sqrt[3]{x})^{16-m} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^m = C_{16}^m x^{\frac{16-m}{3}} x^{-m} = C_{16}^m x^{\frac{16-4m}{3}}$.

Член розкладу не залежить від x . Це означає, що показник степеня дорівнює 0, тобто $\frac{16-4m}{3} = 0$.

Звідси $m = 4$. Отже, п'ятий член даного розкладу не залежить від x .

Відповідь: п'ятий член.