

Лекція 2

Сигнали та їх енергетичні характеристики

Основними характеристиками детермінованих сигналів є енергетичні характеристики.

Миттєва потужність визначається як квадрат миттєвого значення $s(t)$:

$$p(t) = s^2(t).$$

Якщо $s(t)$ – напруга або струм, то $p(t)$ – це миттєва потужність, що виділяється на опорі в 1 Ом.

Енергія сигналу на інтервалі $[t_1, t_2]$ визначається як інтеграл від миттєвої потужності:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt.$$

Запишемо відношення

$$\frac{E}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt = \overline{s^2(t)}$$

это **середня енергія** сигналу на інтервалі $[t_1, t_2]$.

Реальні сигнали мають кінцеву тривалість та обмежену за величиною миттєву потужність. Енергія таких сигналів є кінцевою. У теорії сигналів часто розглядаються функції часу, які задані на всій осі часу $-\infty < t < +\infty$ (наприклад, синус та косинус). Енергія таких сигналів нескінченна і фізично не має сенсу, це просто математичне уявлення.

Ортогональні сигнали

Згадаємо з математики поняття ортогональності: два сигнали називаються **ортогональними**, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Скалярний добуток сигналів u та ϑ :

$$(u, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot \vartheta(t) dt, \quad (1.3)$$

$$\cos \psi_{u\vartheta} = \frac{(u, \vartheta)}{\|u\| \cdot \|\vartheta\|}. \quad (1.4)$$

де $\|u\|, \|\vartheta\|$ – **норми** сигналів u та ϑ .

Норма для речового сигналу дорівнює

$$\|u\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt},$$

Для комплексних сигналів норма

$$\|u\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt},$$

де $u^*(t)$ – комплексно пов’язаний (сполучений) сигнал.

Для ортогональних сигналів скалярний добуток дорівнює нулю.
Скалярний добуток має наступні властивості:

1. $(u, v) \geq 0$;
2. $(u, v) = (v, u)$;
3. $(\lambda u, v) = \lambda (u, v)$, де λ – число;
4. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$.

Лінійний простір, в якому введений скалярний добуток (1.3) та виконуються умови (1.5) називається **речовим гільбертовим простором** H . В такому просторі справедливим є нерівність Коші-Буняковського

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \quad (1.6)$$

Для комплексних сигналів скалярний добуток має вигляд:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \dot{v}^*(t) dt, \quad (1.7)$$

де $\dot{v}^*(t)$ – комплексно пов’язане число.

Комплексні числа

Істотно простіше та зручніше розширити цю ідею на використання комплексної площини! Це така площина в якій упорядкована пара чисел (x, y) інтерпретується як радіус-вектор з початком у нулі та кінцем у точці (x, y) .

Зазвичай комплексне число представляють у вигляді суми речової та уявної частин:

$$\dot{a} = x + jy,$$

де $x = \text{Re} \dot{a}$, $y = \text{Im} \dot{a}$, j – уявна одиниця, тобто число, що задовольняє рівнянню $j^2 = -1$.

Комплексно сполучене число:

$$\dot{a}^* = x - jy$$

Модуль комплексного числа:

$$|\dot{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re} \dot{a})^2 + (\text{Im} \dot{a})^2}.$$

Форми представлення комплексного числа:

- алгебраїчна $\dot{a} = x + jy$;
- тригонометрична – якщо речові та уявні числа комплексного числа виразити через модуль $|\dot{a}|$ і аргумент φ ($x = |\dot{a}| \cos \varphi$, $y = |\dot{a}| \sin \varphi$), то отримаємо

$$\dot{a} = |\dot{a}|(\cos\varphi + j\sin\varphi); \quad \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

– показова $\dot{a} = |\dot{a}|e^{j\varphi}$.

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 & (e^\alpha)^\beta &= e^{\alpha\beta} & e^{-\alpha} &= \frac{1}{e^\alpha} \\ e^\alpha e^\beta &= e^{\alpha+\beta} & (e \cdot e)^\alpha &= e^\alpha e^\alpha & e^{j\alpha} &= \cos \alpha + j \sin \alpha \\ \frac{e^\alpha}{e^\beta} &= e^{\alpha-\beta} & \left(\frac{e}{e}\right)^\alpha &= \frac{e^\alpha}{e^\alpha} & \int e^{\alpha x} dx &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \\ & & & & \frac{de^{\alpha x}}{dx} &= \alpha e^{\alpha x} \end{aligned}$$

$$\frac{e^\alpha}{e^\beta} = e^{\alpha-\beta}$$

$$\frac{18e^{j6\pi}}{2e^{-j4\pi}} = 9e^{j6\pi - (-j4\pi)} = 9e^{j6\pi + j4\pi} = 9e^{j10\pi}$$

2 Спектральне представлення сигналів

2.1 Ортонормований базис. Узагальнений ряд Фур'є

Нехай H – гільбертовий простір сигналів з кінцевим значенням енергії та ці сигнали визначені на інтервалі $[t_1, t_2]$ (інтервал може бути кінцевим або нескінченним). Припустимо, що на цьому ж інтервалі задана нескінченна система функцій $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$, попарно ортогональних один одному та таких, що мають одиничні норми:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

Кажуть, при цьому у просторі сигналів заданий **ортонормований базис**.

Розкладемо довільний сигнал $s(t) \in H$ в ряд:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i(t) \quad (2.2)$$

Такий ряд називається **узагальненим рядом Фур'є** сигналу $s(t)$ в обраному базисі $u_i(t)$.