

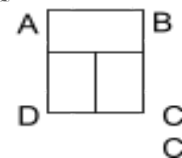
6 класс, 2010 год

1. В числе 4 060 704 все нули замените одной и той же цифрой, чтобы при этом получилось число, кратное 9. Найдите все возможные решения.

2. Из городов А и В, расстояние между которыми 550 км, навстречу друг другу вышли два поезда и встретились в пункте С. Оказалось, что скорости их относятся, как 4 : 5, а время их движения – как 5 : 7. На каком расстоянии от А находится пункт С?

3. Четыре мальчика Толя, Янка, Павлик и Артем играют в камешки. Проигравший отдает каждому по столько камешков, сколько у того есть. Первый раз проиграл Толя, второй – Янка, третий – Павлик, четвертый – Артем, после чего у каждого стало по 112 камешков. Сколько камешков было у каждого мальчика вначале?

4. Рамка окна – прямоугольник ABCD, разбитый на три меньших равных между собой прямоугольника. Известно, что периметр прямоугольника ABCD равен 700 см. Найти длину внутренней Т-образной части рамы.



5. Цена некоторого товара вначале снизилась на 25 %, затем увеличилась на 20 %, затем снизилась на 10 % и, наконец, увеличилась на 20 %. Как в результате изменилась цена этого товара по сравнению с первоначальной?

6. Малыш и Карлсон по очереди достают из коробки конфеты, при этом каждый берет на одну конфету больше или меньше, чем перед этим взял другой, не брать конфеты из коробки в свою очередь нельзя. Вначале в коробке было 25 конфет и Малыш и Карлсон договорились, что тому, кто возьмет последнюю конфету, достанется торт. Всегда ли Карлсон, который первым берет конфеты, сможет выиграть торт, если вначале он имеет право взять 1 или 2 конфеты?

Решения 6 класс, 2010 год

1. Ответ: 2; 5; 8.

Обозначим цифру, на которую заменили все 0, через x и найдем сумму цифр полученного числа:

$4 + 6 + 7 + 4 + 3 \cdot x = 3 \cdot (7 + x)$. Данная сумма делится на 3, так как первый множитель равен 3. Значит, чтобы эта сумма делилась на 9, необходимо и достаточно, чтобы на 3 делился второй множитель: $(7 + x)$. Так как x — цифра, то методом перебора находим, что

$7 + 2 = 9$ (делится на 3), $7 + 5 = 12$ (делится на 3), $7 + 8 = 15$ (делится на 3).

Значит, вместо 0 можно поставить цифры 2; 5; 8.

2. Ответ: 200 км.

Обозначим скорость поезда, вышедшего из пункта А через U_1 , а время до встречи через t_1 . Тогда расстояние от А до С равно $U_1 t_1$. Обозначим скорость поезда, вышедшего из пункта В через U_2 , а время до встречи через t_2 . Тогда $U_1 : U_2 = 4 : 5$, $t_1 : t_2 = 5 : 7$. Перемножая эти отношения, получим $U_1 t_1 : U_2 t_2 =$

$4 \cdot 5 : 5 \cdot 7$ или $U_1 t_1 : U_2 t_2 = 4 : 7$. Откуда $U_2 t_2 = \frac{7}{4} U_1 t_1$.

Так как $U_1 t_1 + U_2 t_2 = 550$, то $U_1 t_1 + \frac{7}{4} U_1 t_1 = 550$. Откуда $U_1 t_1 = 550 \cdot 4 : 11 = 200$.

3. Ответ: у Толи – 231, у Янки – 119, у Павлика – 63, у Артема – 35.

Решение проведем с конца, выполняя операции с камешками в обратном порядке. Учтем, что в результате одной игры проигравший отдает столько камешков, сколько есть на данный момент у остальных трех ребят вместе. При этом количество камешков у каждого удваивается. До четвертой игры у Толи, Янки и Павлика было по $112 : 2 = 56$ камешков, так как в результате выигрыша их суммы удвоились, а у Артема было $112 + 3 \cdot 56 = 280$ камешков, так как в результате проигрыша он отдал каждому из оставшихся по 56 камешков. Далее рассуждаем таким же образом. Перемещения камешков занесем в таблицу:

Толя	Янка	Павлик	Артем
112	112	112	112
56	56	56	$112 + 3 \cdot 56 = 280$
28	28	$56 + 28 + 28 + 140 = 252$	140
14	$28 + 14 + 126 + 70 = 238$	126	70
$14 + 119 + 63 + 35 = 231$	119	63	35

4. Ответ: 280 см.

Так как прямоугольник разбит на три меньших одинаковых прямоугольника, то обе «перекладины» Т-образной части равны и верхняя «перекладина» разбивается вертикальной на две одинаковые части (ч). Обозначим ее длину через 2 ч. тогда периметр всего прямоугольника равен $(2 \text{ ч.} + 3 \text{ ч.}) \cdot 2 = 10 \text{ ч.}$ С другой стороны он равен 700 см. Значит, 1 ч. = 70 см. Длина Т-образной части равна 4 ч., т. е. 280 см.

5. Ответ: уменьшилась на 2,8 %.

Решение:

1 способ: Пусть x единиц – первоначальная цена товара. Тогда после первого снижения на 25% цена стала равна $x - 0,25 \cdot x = 0,75 \cdot x$ единиц, а после увеличения цены на 20% - $0,75 \cdot x + 0,2 \cdot (0,75 \cdot x) = 0,9 \cdot x$ единиц. После второго снижения на 10% цена стала $0,9 \cdot x + 0,1 \cdot (0,9 \cdot x) = 0,81 \cdot x$ единиц, и, наконец, после увеличения на 20% - $0,81 \cdot x + 0,2 \cdot (0,81 \cdot x) = 0,972 \cdot x$. Так как $x > 0,972 \cdot x$, то новая цена товара по сравнению с первоначальной ценой уменьшилась на 2,8%.

2 способ: Пусть начальная цена равна 1. Тогда после снижения на 25% она стала 75%, или 0,75. После повышения цены на 20% она стала 120% от предыдущей, или $0,75 \cdot 1,2 = 0,9$. После второго снижения на 10% цена стала 90% от предыдущей, или $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$. Второе увеличение цены привело к тому, что она стала равной 120% от последней цены, или $0,81 \cdot 1,2 = 0,972$. Так как $1 > 0,972$, то новая цена товара по сравнению с первоначальной ценой уменьшилась на 2,8%.

6. Ответ: Всегда.

Первым ходом (и всеми последующими) Карлсон возьмет одну конфету, тогда Малыш имеет право брать только по 2 конфеты. После каждого «круга» число конфет уменьшается на 3. Остаток от деления 25 на 3 равен 1, то есть после 8 полных «кругов» к ходу Карлсона останется 1 конфета, которую он и заберет.

