

Запишите в тетрадь:

10.11.22(на полях)

Дистанционная работа

Тема: Равносильные уравнения и неравенства.
Иррациональные уравнения.

- Внимательно проработайте §§ 8 – 10. **Разберите решения предложенных в этих параграфах задач !**
Похожие будут предложены в проверочной работе.
- <https://www.youtube.com/watch?v=bARWZaRqNe8> - проработай видеоурок

● Запомнить:

Определение

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной x , при которых имеют смысл обе части уравнения.

Определение

Два уравнения называют равносильными, если множества их корней равны.

Теорема 4.1

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 4.2

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Определение

Если множество корней первого уравнения является подмножеством множества корней второго уравнения, то второе уравнение называют следствием первого уравнения.



Теорема 4.3

Если к обеим частям неравенства прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4.4

Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4.5

Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Определение

Если множество решений первого неравенства является подмножеством множества решений второго неравенства, то второе неравенство называют следствием первого неравенства.

Например, уравнение $x^2 = 1$ является следствием уравнения $x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$. Уравнение-следствие имеет два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, а уравнение $x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$ имеет один корень — число 1. В этом случае корень -1 уравнения $x^2 = 1$ является посторонним корнем уравнения $x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$.

Решая уравнение, надо стараться построить цепочку равносильных уравнений, чтобы в конце получить уравнение, равносильное данному, корни которого легко найти.

Однако если при решении уравнения равносильность не была соблюдена и произошёл переход к уравнению-следствию, то полученные при этом посторонние корни, как правило, можно выявить с помощью проверки.



ПРИЧИНЫ ПОЯВЛЕНИЯ ПОСТОРОННИХ КОРНЕЙ И ПОТЕРИ КОРНЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ					
Причина	При каких преобразованиях это может происходить	Пример неправильного (или неполного) решения	Где ошибка	Как получить правильное (или полное) решение	Пример правильного (или полного) решения
1. Появление посторонних корней при решении уравнения					
Получение уравнений-следствий:	1. Приведение подобных членов	$x^2 + \sqrt{x-2} = 6x + \sqrt{x-2}.$ Перенесем из правой части уравнения в левую слагаемое $\sqrt{x-2}$ с противоположным знаком и приведем подобные члены. Получим $x^2 - 6x = 0$, $x_1 = 0, x_2 = 6$	$x_1 = 0$ не является корнем заданного уравнения	Выполнить проверку корней в заданное уравнение	$x^2 + \sqrt{x-2} = 6x + \sqrt{x-2}.$ $x^2 - 6x = 0, x_1 = 0, x_2 = 6.$ Проверка показывает, что $x_1 = 0$ — посторонний корень, $x_2 = 6$ — корень. Ответ: 6
а) переход к уравнению, ОДЗ которого шире, чем ОДЗ заданного уравнения;	2. Приведение обеих частей уравнения к общему знаменателю (при отбрасывании знаменателя)	$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2+5x+6}.$ Умножим обе части уравнения на общий знаменатель всех дробей $(x+2)(x+3)$. Получим $4(x+3) + 7(x+2) = 4,$ $11x = -22, x = -2$	$x = -2$ не является корнем заданного уравнения		$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2+5x+6}.$ $4(x+3) + 7(x+2) = 4;$ $11x = -22, x = -2.$ Проверка показывает, что $x = -2$ — посторонний корень. Ответ: корней нет
	3. Возведение обеих частей иррационального уравнения в квадрат	$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}.$ $2x+1 = x,$ $x = -1$	$x = -1$ не является корнем заданного уравнения		$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}.$ $2x+1 = x, x = -1.$ Проверка показывает, что $x = -1$ — посторонний корень. Ответ: корней нет
б) выполнение преобразований, при которых происходит неявное умножение на нуль;	Умножение обеих частей уравнения на выражение с переменной	$x^2 + x + 1 = 0.$ Умножим обе части уравнения на $x-1$. $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0.$ Получим $x^3 - 1 = 0$, $x = 1$	$x = 1$ не является корнем заданного уравнения		В данном уравнении не было необходимости умножать на $x-1$. $x^2 + x + 1 = 0.$ $D = -3 < 0.$ Ответ: корней нет. Если применить умножение обеих частей уравнения на $x-1$, то проверка показывает, что $x = 1$ — посторонний корень, то есть уравнение не имеет корней

в) применение к обеим частям уравнения функции, которая не является возрастающей или убывающей	Возведение обеих частей уравнения в четную степень или применение к обеим частям уравнения тригонометрических функций	$x - 1 = 2x + 1.$ Возведем обе части уравнения в квадрат: $(x - 1)^2 = (2x + 1)^2.$ Получим $3x^2 + 6x = 0$, $x_1 = 0, x_2 = -2$	$x_1 = 0$ не является корнем заданного уравнения	Выполнить проверку подстановкой корней в заданное уравнение	При решении данного уравнения не было необходимости возводить в квадрат. $x - 1 = 2x + 1.$ $x - 2x = 1 + 1, x = -2.$ Ответ: -2. Если применить возведение в квадрат, то проверка показывает, что $x_2 = -2$ — корень, а $x_1 = 0$ — посторонний корень
2. Потеря корней при решении уравнения					
Явное или неявное сужение ОДЗ заданного уравнения, в частности выполнение преобразований, в ходе которых происходит неявное деление на нуль	1. Деление обеих частей уравнения на выражение с переменной	$x^2 = x.$ Поделив обе части уравнения на x , получим $x = 1$	Потеряли корень $x = 0$, поскольку после деления на x фактически получили уравнение $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x},$ ОДЗ которого: $x \neq 0$, то есть сузили ОДЗ заданного уравнения	Те значения, на которые сузилась ОДЗ, необходимо рассмотреть отдельно	$x^2 = x.$ 1. При $x = 0$ получаем $0^2 = 0$ — верное равенство, таким образом, $x = 0$ — корень. 2. При $x \neq 0$ получаем $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}, x = 1$ Ответ: 0; 1 (Конечно, удобнее решать так: $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$, $x = 0$ или $x = 1$.)
	2. Сложение, вычитание, умножение или деление обеих частей уравнения на выражение, ОДЗ которого уже, чем ОДЗ заданного уравнения	$x^2 = 1.$ Если к обеим частям уравнения прибавить $\sqrt{x}$, то получим уравнение $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x},$ у которого только один корень $x = 1$	Потеряли корень $x = -1$, поскольку ОДЗ данного уравнения: x — любое число, а $\sqrt{x}$ существует только при $x \geq 0$		При решении данного уравнения не было необходимости прибавлять к обеим частям $\sqrt{x}$. $x^2 = 1, x = \pm 1.$ Ответ: ± 1 . (Если бы пришлось прибавить к обеим частям $\sqrt{x}$, то при $x < 0$ данное уравнение необходимо рассмотреть отдельно, и тогда получим еще и корень $x = -1$.)

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Определение. Иррациональным уравнением (неравенством) называют уравнение (неравенство), которое содержит переменную под знаком корня n -й степени (радикала)

Схема решения



Теоремы о равносильности некоторых иррациональных уравнений (неравенств)

Для уравнений

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x)$$

Для неравенств

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g^{2k+1}(x)$$

При возведении обеих частей уравнения (или неравенства) в нечетную степень (с сохранением знака неравенства) получаем уравнение (или неравенство), равносильное данному

$$\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ ИЛИ } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$$

Если обе части уравнения (или неравенства) неотрицательны, то при возведении обеих частей в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем уравнение (или неравенство), равносильное данному (на ОДЗ данного)

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ ИЛИ } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$$

Если обе части уравнения (или неравенства) неотрицательны, то при возведении обеих частей в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем уравнение (или неравенство), равносильное данному (на ОДЗ данного)

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример. $\sqrt{x-3} = 2$.

Решение

$$\begin{aligned} x - 3 &= 2^2, \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Ответ: 7

Пример. $\sqrt{x-3} = -2$.

Решение

Так как $\sqrt{x-3} \geq 0$ всегда (на ОДЗ), то корней нет.

Ответ: корней нет

Пример. $\sqrt[3]{x-3} = -2$.

Решение

$$\begin{aligned} x - 3 &= (-2)^3, \\ x - 3 &= -8, \\ x &= -5. \end{aligned}$$

Ответ: -5

Пример
 $\sqrt{x-3} > 2$.

Решение

$$\begin{aligned} x - 3 &> 2^2, \\ x &> 7. \end{aligned}$$

Ответ: (7; +∞)

Пример
 $\sqrt{x-3} > -2$.

Решение

x — любое число из ОДЗ, т. е. $x - 3 \geq 0$, $x \geq 3$.

Ответ: [3; +∞)

Пример
 $\sqrt{x-3} < 2$.

Решение

Учитывая ОДЗ, получаем $0 \leq x - 3 < 4$, т. е. $3 \leq x < 7$.

Ответ: [3; 7)

Пример
 $\sqrt{x-3} < -2$.

Решение

Так как $\sqrt{x-3} \geq 0$ всегда (на ОДЗ), то решений нет.

Ответ: решений нет

Пример
 $\sqrt[3]{x-3} < -2$.

Решение

$$\begin{aligned} x - 3 &< (-2)^3, \\ x - 3 &< -8, \\ x &< -5. \end{aligned}$$

Ответ: (-∞; -5)

Только после внимательной работы над теоретическим материалом, разбором решений предложенных примеров приступай к проверочной работе.
Для выполнения проверочной работы пройди по ссылке:

<https://edu.skysmart.ru/student/mukuvohata>

Проверочная работа будет открыта до 23 часов 12. 11.2022.
Время выполнения - 1 час.

Если будет нужна моя помощь:

email: larapolovceva@gmail.com

тел: 071-327-44-27