

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	Tarih	6-10/10/2025
Sınıf	12	Süre	4 ders saati
Alt Öğrenme Alanı	SAYILAR VE CEBİR		
Konu	Üstel, Logaritmik Denklemler ve Eşitsizlikler		

BÖLÜM II

Kazanım	12.1.3.1. Üstel, logaritmik denklemlerin ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.
Kazanım Açıklaması	---
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

ÜSTEL, LOGARİTMİK DENKLEMLERİN VE EŞİTSİZLİKLERİN ÇÖZÜM KÜMELERİ

Üstel Denklemler

Tabanı 1 den farklı pozitif gerçekte sayı olan ve bilinmeyen üs olarak bulunduğru denklemlere üstel denklemler denir. Bu tür denklemlerin çözüm kümelerinin bulunmasında üslü sayıların veya logaritmik fonksiyonların özellikleri kullanılır.

ÖRNEK III

$3^{2x+1} = \frac{1}{27}$ dekleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM III

$$\begin{aligned}
 3^{2x+1} &= \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{2x+1} = 3^{-3} \\
 &\Rightarrow 2x + 1 = -3 \\
 &\Rightarrow 2x = -4 \\
 &\Rightarrow x = -2 \text{ olur. Bu durumda } \mathcal{C} = \{-2\} \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

ÖRNEK III

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{16}{81}\right)^x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM III

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \Rightarrow x + 1 = 4x \\
 &\Rightarrow 3x = 1 \\
 &\Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ olur. Bu durumda } \mathcal{C} = \left\{\frac{1}{3}\right\} \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

ÖRNEK |||

$9^x - 7 \cdot 3^x + 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\begin{aligned}
 9^x - 7 \cdot 3^x + 12 = 0 &\Rightarrow (3^x)^2 - 7 \cdot 3^x + 12 = 0 \\
 &\Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \quad (3^x = t \text{ dönüşümü yapılır.}) \\
 &\Rightarrow (t - 4)(t - 3) = 0 \\
 &\Rightarrow t = 4 \text{ veya } t = 3 \\
 &\Rightarrow 3^x = 4 \text{ veya } 3^x = 3 \\
 &\Rightarrow x = \log_3 4 \text{ veya } x = 1 \text{ olur.}
 \end{aligned}$$

Bu durumda $\mathcal{C} = \{1, \log_3 4\}$ bulunur.

ÖRNEK |||

$e^{2x-1} = 2^{x+2}$ denkleminin kökünü bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\begin{aligned}
 e^{2x-1} = 2^{x+2} &\Rightarrow \ln(e^{2x-1}) = \ln(2^{x+2}) \quad (\text{Her iki tarafın } e \text{ tabanında logaritması alınır.}) \\
 &\Rightarrow (2x - 1) \cdot \ln e = (x + 2) \cdot \ln 2 \\
 &\Rightarrow 2x - 1 = x \ln 2 + 2 \ln 2 \\
 &\Rightarrow 2x - x \ln 2 = 1 + 2 \ln 2 \\
 &\Rightarrow x(2 - \ln 2) = 1 + 2 \ln 2 \\
 &\Rightarrow x = \frac{1 + 2 \ln 2}{2 - \ln 2} \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

ÖRNEK |||

$e^x + 7 \cdot e^{-x} - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\begin{aligned}
 e^x + 7 \cdot e^{-x} - 8 = 0 &\Rightarrow t + 7 \cdot \frac{1}{t} - 8 = 0 \quad (e^x = t \text{ dönüşümü yapılır ve } e^{-x} = \frac{1}{t} \text{ olur.}) \\
 &\Rightarrow \frac{t^2 + 7 - 8t}{t} = 0 \\
 &\Rightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \\
 &\Rightarrow (t - 7)(t - 1) = 0 \\
 &\Rightarrow t = 7 \text{ veya } t = 1 \\
 &\Rightarrow e^x = 7 \text{ veya } e^x = 1 \\
 &\Rightarrow x = \ln 7 \text{ veya } x = 0 \text{ olur.}
 \end{aligned}$$

Bu durumda $\mathcal{C} = \{0, \ln 7\}$ bulunur.

Logaritmik Denklemler

İçinde bilinmeyen logaritmasını bulunduran denklemlere logaritmik denklemler denir. Bu tür denklemlerin çözüm kümelerinin bulunmasında logaritma fonksiyonunun özelliklerinden yararlanılır. Logaritmik denklemlerde logaritması alınan ifadelerin pozitif olması şartının yanı sıra taban x e bağlı bir fonksiyon ise tabanın da pozitif ve 1 den farklı olması şartı aranır. Bulunan x değerlerinin bu şartları sağlamasına göre çözüm kümesi oluşturulur.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\checkmark \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \quad (f(x) > 0)$$

$$\checkmark \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (f(x) > 0, g(x) > 0)$$

$$\checkmark \log_{f(x)} g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = (f(x))^b \quad (f(x) > 0, g(x) > 0 \text{ ve } f(x) \neq 1)$$

ÖRNEK III

$\log_2(5x - 7) = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM III

$$\begin{aligned} \log_2(5x - 7) = 3 &\Rightarrow 5x - 7 = 2^3 \\ &\Rightarrow 5x - 7 = 8 \\ &\Rightarrow 5x = 15 \\ &\Rightarrow x = 3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $5x - 7 > 0$ olmalıdır.

$$5x - 7 > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{5} \text{ olur.}$$

Bulunan x değeri bu koşulu sağladığından $\mathcal{C} = \{3\}$ bulunur.

ÖRNEK III

$\log_x(30 + x) = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM III

$$\begin{aligned} \log_x(30 + x) = 2 &\Rightarrow x^2 = 30 + x \\ &\Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \\ &\Rightarrow (x - 6)(x + 5) = 0 \\ &\Rightarrow x = 6 \text{ veya } x = -5 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x + 30 > 0$, $x > 0$ ve $x \neq 1$ olmalıdır.

Bulunan x değerlerinden 6 sayısı bu koşulları sağladığından $\mathcal{C} = \{6\}$ bulunur.

ÖRNEK |||

$\log_3 4x + \log_9 x^2 = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\log_3 4x + \log_9 x^2 = 2 \Rightarrow \log_3 4x + \log_{3^2} x^2 = 2$$

$$\Rightarrow \log_3 4x + \log_3 x = 2$$

$$\Rightarrow \log_3 (4x \cdot x) = 2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ veya } x = -\frac{3}{2} \text{ olur.}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $4x > 0$ olması gerektiğinden $\mathcal{C} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK |||

$$\ln x + \ln y = 5$$

$$\ln x^2 + \ln y^3 = 12$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\left. \begin{array}{l} \ln x + \ln y = 5 \\ \ln x^2 + \ln y^3 = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2/\ln x + \ln y = 5 \\ 2\ln x + 3\ln y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{r} -2\ln x - 2\ln y = -10 \\ 2\ln x + 3\ln y = 12 \\ \hline \ln y = 2 \Rightarrow y = e^2 \text{ bulunur.} \end{array}$$

$\ln x + \ln y = 5$ denkleminde $\ln y = 2$ yazılırsa $\ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$ olur.

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x > 0$ ve $y > 0$ olmalıdır.

Bulunan x ve y değerleri sıfırdan büyük olduğundan $\mathcal{C} = \{(e^3, e^2)\}$ bulunur.

ÖRNEK |||

1 den farklı a , b ve c pozitif gerçel sayıları için $\log_b c = 3$ ve $\log_b a = \frac{1}{2}$ olduğuna göre $\log_3 x = \log_a \left(\frac{a^2}{b \cdot \sqrt[6]{c}} \right)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\begin{aligned} \log_3 x = \log_a \left(\frac{a^2}{b \cdot \sqrt[6]{c}} \right) &= \log_a a^2 - \log_a b - \log_a \sqrt[6]{c} \\ &= 2 \cdot \underbrace{\log_a a}_1 - \underbrace{\frac{1}{\log_b a}}_2 - \frac{1}{6} \cdot \log_a c \\ &= 2 \cdot 1 - 2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{\log_b c}{\log_b a} \\ &= 2 - 2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{\frac{1}{2}} \\ &= -1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ olduğundan $\mathcal{C} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ bulunur.

Üstel ve Logaritmali Eşitsizlikler

Üstel eşitsizliklerde $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ için

✓ $a > 1$ ise $f(x) \geq g(x)$ olur.

✓ $0 < a < 1$ ise $f(x) \leq g(x)$ olur. ($0 < a < 1$ ise eşitsizlik yön değiştirir.)

Logaritmali eşitsizliklerde $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ için

✓ $a > 1$ ise $f(x) \leq g(x)$ olur.

($a > 1$ ise logaritma fonksiyonu artandır. Bu durumda eşitsizlik yön değiştirmez.)

✓ $0 < a < 1$ ise $f(x) \geq g(x)$ olur.

($0 < a < 1$ ise logaritma fonksiyonu azalandır. Bu durumda eşitsizlik yön değiştirir.)

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmalıdır.

ÖRNEK |||

$3^x - 27 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\begin{aligned} 3^x - 27 > 0 &\Rightarrow 3^x > 27 \\ &\Rightarrow 3^x > 3^3 \\ &\Rightarrow x > 3 \text{ olur. Bu durumda } \mathcal{C} = (3, \infty) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK |||

$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{9}{16}\right)^{-3x-4}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{9}{16}\right)^{-3x-4} &\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{-6x-8} \quad (0 < \frac{3}{4} < 1 \text{ olduğundan eşitsizlik yön değiştirir.}) \\ &\Rightarrow 2x - 1 \leq -6x - 8 \\ &\Rightarrow 8x \leq -7 \\ &\Rightarrow x \leq -\frac{7}{8} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda $\mathcal{C} = \left(-\infty, -\frac{7}{8}\right]$ bulunur.

ÖRNEK

$(x^2 - 9)(3^{x-2} - 9) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x^2 - 9)(3^{x-2} - 9) \geq 0$ eşitsizliğinin işaret tablosunu yapmak için öncelikle

$(x^2 - 9)(3^{x-2} - 9) = 0$ denkleminin kökleri bulunur.

$$(x^2 - 9)(3^{x-2} - 9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \text{ veya } 3^{x-2} - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \text{ veya } 3^{x-2} = 3^2$$

$$\Rightarrow x = 3 \vee x = -3 \vee x = 4 \text{ olur.}$$

$x < 4$ ise $3^{x-2} - 9 < 0$ ve $x > 4$ ise $3^{x-2} - 9 > 0$ olacağından $3^{x-2} - 9$ ifadesi eşitsizlik tablosunda 4 ün sağında pozitif ve 4 ün solunda negatif değerler alacaktır.

x	$-\infty$	-3	3	4	∞
$3^{x-2} - 9$	-	-	-	•	+
$x^2 - 9$	+	•	-	•	+
$(3^{x-2} - 9) \cdot (x^2 - 9)$	-	•	+	•	+

Bu durumda $\mathcal{C} = [-3, 3] \cup [4, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_2(x^2 - 3x + 8) - \log_2(x + 1) > 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_2(x^2 - 3x + 8) - \log_2(x + 1) > 1 \Rightarrow \log_2\left(\frac{x^2 - 3x + 8}{x + 1}\right) > \log_2 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 8}{x + 1} > 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 8}{x + 1} - 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 8 - 2x - 2}{x + 1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 3)(x - 2)}{x + 1} > 0 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$	-1	2	3	∞
$\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$	-	○	+	○	+

$$\mathcal{C}_1 = (-1, 2) \cup (3, \infty)$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x^2 - 3x + 8 > 0$ eşitsizliği $\Delta < 0$ ve x^2 nin katsayısı pozitif olduğundan her x gerçekte sayı için sağlanır. Bu durumda $\mathcal{C}_2 = \mathbb{R}$ olur.
Yine logaritmanın tanımı gereği $x + 1 > 0$ olacağından $\mathcal{C}_3 = (-1, \infty)$ olur.
Buna göre $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$ olduğundan $\mathcal{C} = (-1, 2) \cup (3, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK III

$\log_2(\log_3(x - 4)) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM III

$$\begin{aligned}\log_2(\log_3(x - 4)) < 1 &\Rightarrow \log_3(x - 4) < 2^1 \\ &\Rightarrow x - 4 < 3^2 \\ &\Rightarrow x - 4 < 9 \\ &\Rightarrow x < 13 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x - 4 > 0$ ve $\log_3(x - 4) > 0$ olmalıdır.

- $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$ olur.
- $\log_3(x - 4) > 0 \Rightarrow x - 4 > 1 \Rightarrow x > 5$ olur.

$$\left. \begin{array}{l} x < 13 \\ x > 4 \\ x > 5 \end{array} \right\} \text{ olduğundan } \mathcal{C} = (5, 13) \text{ bulunur.}$$

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

ÖRNEK III

$2 < \log_2(x + 3) \leq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM III

$$\begin{aligned}2 < \log_2(x + 3) \leq 3 &\Rightarrow \log_2 4 < \log_2(x + 3) \leq \log_2 8 \\ &\Rightarrow 4 < x + 3 \leq 8 \\ &\Rightarrow 1 < x \leq 5\end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$ olmalıdır.

Bu durumda çözüm kümesi $\mathcal{C} = (1, 5]$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_2\left(\frac{x+2}{x-3}\right) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\log_2\left(\frac{x+2}{x-3}\right) < 1 &\Rightarrow \frac{x+2}{x-3} < 2 \\ &\Rightarrow \frac{x+2}{x-3} - 2 < 0 \\ &\Rightarrow \frac{x+2-2x+6}{x-3} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{8-x}{x-3} < 0 \dots\dots\dots(1) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $\frac{x+2}{x-3} > 0 \dots\dots\dots(2)$ olmalıdır.

(1) ve (2) eşitsizlikleri için işaret tablosu oluşturulursa

x	$-\infty$	-2	3	8	∞
$\frac{8-x}{x-3}$	-	-	0	+	-
$\frac{x+2}{x-3}$	+	0	-	0	+

çözüm kümesi
çözüm kümesi

$\mathcal{C} = (-\infty, -2) \cup (8, \infty)$ bulunur.

Dersin Diğer Derslerle
İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin
Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.

.....
.....
Matematik Öğretmeni

.../.../2025
UYGUNDUR
Okul Müdürü

.....