Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ХКМ 1/1

15.11.2022

Лекция

Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.

1.**Образовательная**: рассмотреть и доказать основные тригонометрические тождества.

*2.***Воспитательная***:* воспитать логическое мышление, внимание.

*3.***Развивающая***:* развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал лекционного занятия на тему: «Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента» формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Интеграционные связи: тема взаимосвязана с предыдущими темами дисциплины «Математика».

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева и др.]. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.

Вопросы лекции:

1) Связь между синусом и косинусом и cos одного угла.
2) Тангенс и котангенс через синус и косинус.
3) Тангенс и косинус, котангенс и синус.

Связь между sin и cos одного угла

Поговорим о важном тригонометрическом тождестве, которое считается основой основ в тригонометрии.

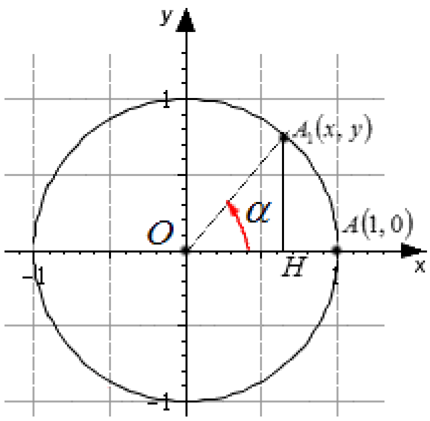
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Для его доказательства необходимо обратиться к теме с единичной окружностью .

Пусть даны координаты точки $A(1,0)$, которая после поворота на угол α становится в точку A1. По определению sin и cos точка A1 получит координаты (cos α, sin α). Так как A1 находится в пределах единичной окружности, значит, координаты должны удовлетворят условию $x^2+y^2=1$ этой окружности. Выражение $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ должно быть справедливым. Для этого необходимо доказать основное тригонометрическое тождество для всех углов поворота α.

В тригонометрии выражение $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ применяют как теорему Пифагора в тригонометрии. Для этого рассмотрим подробное доказательство.

Используя единичную окружность, поворачиваем точку A с координатами (1,0) вокруг центральной точки O на угол α. После поворота точка меняет координаты и становится равной A1(x,y). Опускаем перпендикулярную прямую A1H на Ox из точки A1.



На рисунке отлично видно, что образовался прямоугольный треугольник OA1H. По модулю катеты OA1H и OH равные, запись примет такой вид: $||A1H||=||y||$, $||OH||=||x||$|A1H|=|y|,|OH|=|x|. Гипотенуза OA1 имеет значение равное радиусу единичной окружности, $||OA1||=1$|OA1|=1. Используя данное выражение, можем записать равенство по теореме Пифагора: $||A1H||^2+||OH||^2=||OA1||^2$ Это равенство запишем как $||y||^2+||x||^2=1$, что означает $y^2+x^2=1$. Используя определение sin α=y и cosα=x, подставим данные угла вместо координат точек и перейдем к неравенству $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Основная связь между sin и cos угла возможна через данное тригонометрическое тождество. Таким образом, можно считать sin угла с известным cos и наоборот. sin α=±√1−cos2α и cos α=±√1−sin2α соответственно. Величина угла ααопределяет знак перед корнем выражения. Для подробного выяснения необходимо прочитать раздел вычисление синуса, косинуса, тангенса и котангенса с использованием тригонометрических формул.

Чаще всего основную формулу применяют для преобразований или упрощений тригонометрических выражений. Имеется возможность заменять сумму квадратов синуса и косинуса на 1. Подстановка тождества может быть как в прямом, так и обратном порядке: единицу заменяют на выражение суммы квадратов синуса и косинуса.

Тангенс и котангенс через синус и косинус

Из определения косинуса и синуса, тангенса и котангенса видно, что они взаимосвязаны друг с другом, что позволяет отдельно преобразовывать необходимые величины.

$tg\ \alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$

$ctg\ \alpha = \cos\alpha / \sin\alpha$

Из определения синус является ординатой y, а косинус – абсциссой x. Тангенс – это и есть отношения ординаты и абсциссы. Таким образом имеем:

$tg\ \alpha = y/x = \sin\alpha/\cos\alpha$, а выражение котангенса имеет обратное значение, то есть

$ctg\ \alpha = x/y = \cos\alpha/\sin\alpha$.

Связь между тангенсом и котангенсом

Имеется формула, которая показывает связь между углами через тангенс и котангенс. Данное тригонометрическое тождество является важным в тригонометрии и обозначается как $tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1$.

Формула $tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1$ имеет свои особенности в доказательстве. Из определения мы имеем, что $tg\ \alpha = y/x$ и $ctg\ \alpha = x/y$, отсюда получаем $tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = y/x \cdot x/y = 1$. Преобразовав выражение и подставив $tg\ \alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ и $ctg\ \alpha = \cos\alpha/\sin\alpha$, получим $tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = \sin\alpha/\cos\alpha \cdot \cos\alpha/\sin\alpha = 1$.

Тогда выражение тангенса и котангенса имеет смысл того, когда в итоге получаем взаимно обратные числа.

Тангенс и косинус, котангенс и синус

Преобразовав основные тождества, приходим к выводу, что тангенс связан через косинус, а котангенс через синус. Это видно по формулам

$tg^2\ \alpha + 1 = 1/\cos^2\alpha$,

$1 + ctg^2\ \alpha = 1/\sin^2\alpha$.

Определение звучит так: сумма квадрата тангенса угла и 1 приравнивается к дроби, где в числителе имеем 1, а в знаменателе квадрат косинуса данного угла, а сумма квадрата котангенса угла наоборот. Благодаря тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, можно разделить соответствующие стороны на $\cos^2\alpha$ и получить $tg^2\ \alpha + 1 = 1/\cos^2\alpha$, где $\cos^2\alpha$ не должно равняться нулю. При делении на $\sin^2\alpha$ получим тождество $1 + ctg^2\ \alpha = 1/\sin^2\alpha$, где значение $\sin^2\alpha$ не должно равняться нулю.

Домашнее задание

Выписать основные тригонометрические тождества.

Решить задания: № 465 (1, 3), № 466 (1) стр. 140

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru