

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.

Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja.

El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado.

Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?

1.2. Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?

Resolución

T = es zapatilla tradicional D = es zapatilla de diseño B = es zapatilla en buen estado

Formemos una tabla de porcentajes/probabilidades con los datos:

	B	B <sup>c</sup>	Total
T	50% del 80% = 40%	80% - 40% = 40%	80%
D	75% del 20% = 15%	20% - 15% = 5%	20%
Total	55%	45%	100%

1.1. Nos piden  $p(T \cup B) = p(T) + p(B) - p(T \cap B) = 80\% + 55\% - 40\% = 95\%$

1.2. Piden  $p(B \cap D) = 15\%$

1.3. Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?

Resolución

Si A = ser una zapatilla blanca. Nos dicen que A y D = es zapatilla de diseño son independientes.

Luego,  $p(A \cap D) = p(A)p(D) = 0,2p(A)$

Por el teorema de probabilidad total,  $p(A) = p(A \cap T) + p(A \cap D) = \frac{8}{60} + 0,2p(A) \Rightarrow 0,8p(A) = \frac{8}{60}$

Despejando,  $p(A) = \frac{10}{60}$ . Esto significa que Antón tiene 10 pares de zapatillas blancas. Como de

estos 10 pares, 8 son tradicionales, entonces tiene 2 pares de zapatillas blancas de diseño

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices  $A = (1\ 2\ 0\ 2\ 4\ 1\ 1\ 1\ k)$  y  $B = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)$

2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir  $k$  para que  $A$  sea invertible? Calcule  $A^{-1}$  cuando sea posible.

2.1.2. Para  $k = 0$ , calcule la matriz  $X$  que satisfaga la igualdad  $AX - A = B^2 + A^T$ , siendo  $A^T$  la traspuesta de  $A$ .

Resolución

2.1.1. Como  $\det A = 4k + 2 - 1 - 4k = 1 \neq 0$ , la matriz  $A$  tiene inversa  $\forall k \in \mathbb{R}$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{1} (4k - 11 - 2k \quad -2 \quad -2k \quad k \quad 12 \quad -10)^t \Rightarrow A^{-1} = (4k - 1 \quad -2k \quad 2 \quad 1 \quad -2k \quad k \quad -1 \quad -2 \quad 10)$$

2.1.2. Si  $k = 0$ ,  $A = (1\ 2\ 0\ 2\ 4\ 1\ 1\ 1\ 0)$ ,  $A^{-1} = (-1\ 0\ 2\ 1\ 0 \quad -1 \quad -2\ 1\ 0)$ ; trasponiendo términos,  $AX = B^2 + A^T + A$

Multiplicamos por  $A^{-1}$ , por la izquierda, en los dos miembros:  $A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}(B^2 + A^T + A)$

$$X = (-1\ 0\ 2\ 1\ 0 \quad -1 \quad -2\ 1\ 0) [(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1) + (1\ 2\ 1\ 2\ 4\ 1\ 0\ 1\ 0) + (1\ 2\ 0\ 2\ 4\ 1\ 1\ 1\ 0)]$$

$$X = (-1\ 0\ 2\ 1\ 0 \quad -1 \quad -2\ 1\ 0) [(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) + (1\ 2\ 1\ 2\ 4\ 1\ 0\ 1\ 0) + (1\ 2\ 0\ 2\ 4\ 1\ 1\ 1\ 0)] = (-1\ 0\ 2\ 1\ 0$$

$$X = (-1\ 0\ 1\ 2\ 2\ 0 \quad -2\ 1\ 0)$$

2.2. Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema

$$\begin{cases} x + my + z = m \\ x + (3 - m)z = 2m \\ my + 2z = 3m \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son  $A = (1\ m\ 1\ 1\ 0\ 3 \quad -m\ 0\ m\ 2)$  y

$$A^* = (1\ m\ 1\ m\ 1\ 0\ 3 \quad -m\ 2m\ 0\ m\ 2\ 3m)$$

$$\det A = m - 2m - 3m + m^2 = m^2 - 4m = m(m - 4) = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 4$$

- Si  $m \neq 0$ ,  $m \neq 4$ ,  $\det A \neq 0$  y  $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$  de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si  $m = 0$ ,  $\det A = 0$  y  $A = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 3\ 0\ 0\ 2)$ . Como  $|1\ 1\ 1\ 3| = 2 \neq 0$ ,  $\text{rg } A = 2$ .

$A^* = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0)$   $c_3 = 0 \approx A$ . Luego,  $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$  de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si  $m = 4$ ,

$$A^* = (1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 0 \quad -1\ 8\ 0\ 4\ 2\ 12) \quad f_1 - f_2 \quad (1\ 4\ 1\ 4\ 0\ 4\ 2 \quad -4\ 0\ 4\ 2\ 12) \quad f_3 - f_2 \quad (1\ 4\ 1\ 4\ 0\ 4\ 2 \quad -4\ 0\ 0\ 0)$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación  $0 = 16$ , que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

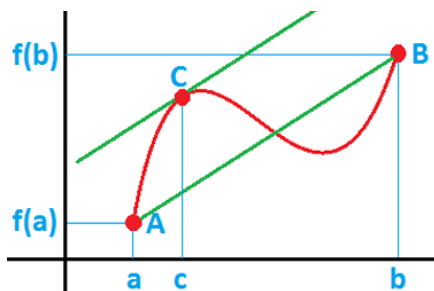
3.1.1. Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Resolución

El teorema del valor medio del cálculo diferencial o de Lagrange, dice:

Si  $f$  es una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$  entonces existe al menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

Geoméricamente significa que hay al menos un  $c \in (a, b)$  (punto de la gráfica  $P(c, f(c))$ ) tal que la recta tangente en  $x = c$  es paralela a la recta que pasa por  $A$  y  $B$ , siendo  $A(a, f(a))$  y  $B(b, f(b))$ .



3.1.2. Calcule  $\int e^x \cos(3x) dx$

**Resolución**

Sea  $I = \int e^x \cos(3x) dx$ . Usamos la integración por partes:

$$\left[ u = \cos(3x) \quad - \quad 3\sin(3x) \quad dx \quad dv = e^x dx \quad v = e^x \right]$$

$$I = e^x \cos(3x) + 3 \int e^x \sin(3x) dx. \text{ Otra vez por partes, } \left[ u = \sin(3x) \quad 3\cos(3x) \quad dx \quad dv = e^x dx \quad v = e^x \right].$$

$$\text{Queda } I = e^x \cos(3x) + 3 \left[ e^x \sin(3x) - 3I \right] = e^x [\cos(3x) + 3\sin(3x)] - 9I$$

$$\text{Luego, } 10I = e^x [\cos(3x) + 3\sin(3x)] \Rightarrow I = \frac{1}{10} e^x [\cos(3x) + 3\sin(3x)] + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

3.2. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} xe^{4x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln \ln(1+x)}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.2.1. Estudie la continuidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

**Resolución**

Para  $x \neq 0$ ,  $f$  es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables, siendo

$$f'(x) = \begin{cases} 1e^{4x} + 4xe^{4x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{\frac{1}{1+x}(1+x) - 1 \cdot \ln \ln(1+x)}{(1+x)^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} (1+4x)e^{4x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - \ln \ln(1+x)}{(1+x)^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$3.2.1. f(x) = 0e^{4 \cdot 0} = 0 = f(x) = f(0) = \frac{\ln \ln(1+0)}{1+0} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0$$

$$3.2.2. f'(x) = (1+4 \cdot 0)e^{4 \cdot 0} = 1 \neq f'(x) = \frac{1 - \ln \ln(1+0)}{(1+0)^2} = 1 \Rightarrow f(x) \text{ es derivable en } x = 0$$

3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x)$  en  $x = -1$ .

**Resolución**

Sabemos que  $f(x) = \begin{cases} xe^{4x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ ,

$f'(x) = \begin{cases} (1+4x)e^{4x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ . La ecuación de la recta

tangente a la gráfica de la función  $f$  en un punto  $A(x_0, f(x_0))$  es  $\text{rtg}: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

En este caso,  $x_0 = -1$ ;  $f'(x_0) = [1 + 4(-1)]e^{4(-1)} = -3e^{-4}$ ;  $f(x_0) = -1e^{4(-1)} = -e^{-4}$ .

$$\text{rtg}: y = -3e^{-4}(x + 1) - e^{-4} \Rightarrow \text{rtg}: y = -3e^{-4}x - 4e^{-4}$$

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Considérense los planos  $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$  y  $\pi': x + z - 1 = 0$  y los puntos  $A(2, 1, 0)$  y  $B(-1, -2, 3)$ .

4.1.1. Calcule la distancia del punto  $A$  al plano paralelo a  $\pi$  que pasa por  $B$ .

**Resolución**

Los planos paralelos a  $\pi$  son de la forma,  $\alpha_k: 2x + 3y + z + k = 0$ , con  $k \in \mathbb{R}$

Como debe pasar por  $B$ , entonces  $2(-1) + 3(-2) + 3 + k = 0 \Rightarrow k = 5$ . El plano es  $\alpha: 2x + 3y + z + 5 = 0$

Usando la fórmula de la distancia de  $A$  al plano  $\alpha$ ,  $d(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{7} \cong 3,21 u$

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

**Resolución**

La recta que se pide es  $t: \begin{cases} 2x + 3y + z + 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 1 - x$ ; sustituyendo,  $2x + 3y + 1 - x + 1 = 0$ .

Operando,  $x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 - 3y$ ; luego,  $z = 1 - (-2 - 3y) = 3 + 3y$ .

Llamando,  $y = k$ , las ecuaciones paramétricas de la recta  $t$  son:  $t: \begin{cases} x = -2 - 3k \\ y = k \\ z = 3 + 3k \end{cases}$ , con  $k \in \mathbb{R}$

4.2. Dadas las rectas  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$  y  $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$

4.2.1. Calcule la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .

**Resolución**

$A(1, 2, 1) \in r$  y un vector director de  $r$  es  $\vec{d}_r = (2, -1, 1)$

$B(2, 1, 1) \in s$  y un vector director de  $s$  es  $\vec{d}_s = (4, -2, 2) // (2, -1, 1)$ . Luego,  $r = s$  ó  $r // s$

$A(1, 2, 1) \in r$  y resulta que  $A(1, 2, 1) \notin s$  porque no cumple su ecuación:  $\frac{1-2}{4} \neq \frac{2-1}{-2} \neq \frac{1-1}{2} \Rightarrow r // s$

4.2.2. Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas  $r$  y  $s$ .

**Resolución**

Como los vectores  $\vec{d}_r = (2, -1, 1)$  y  $\vec{AB} = (1, -1, 0)$  son vectores directores del plano  $\pi$  que se pide,

-----  
un vector normal de  $\pi$  es  $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$ .

Como  $\pi$  pasa por  $A(1, 2, 1) \in r \Rightarrow \pi: 1(x-1) + 1(y-2) - 1(z-1) = 0 \Rightarrow \pi: x + y - z - 2 = 0$