

Cette épreuve se compose de trois problèmes de mécanique. Le premier et le troisième sont intéressants et de difficulté raisonnable. Le second, beaucoup plus difficile, porte sur la navigation à voile ; il comporte une question farfelue (II-6) et des questions non solubles analytiquement, nécessitant le recours à une calculatrice programmable ; il utilise les mêmes notations qu'un problème semblable posé au CAPES en 1986 (Savineau, 2 kg de physique pages 532-535).

## Problème A

### I - Modèle météorologique.

I-1

- \* Projétons la résultante des forces de pression sur un axe, par exemple l'axe des x :

$$dF_x = [p(x) - p(x + dx)] dy dz f_x = \frac{dF_x}{dm} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

qui est la projection sur l'axe de :  $\vec{f} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$

- \* A l'équilibre, la composante verticale de la force de pression est compensée par le poids.

$$I-2 f_x = \frac{a \cos q}{\rho} f_y = \frac{a \sin q}{\rho}$$

I-3

- \* En référentiel terrestre, tout corps est soumis au poids, qui est la résultante de l'attraction de la Terre et de la force centrifuge due à la rotation de la terre autour de l'axe des Pôles. Il est en outre soumis à la force de marée qui est due à la différence entre la pesanteur créée par les autres astres et l'accélération de la Terre (cette force est négligée par l'énoncé qui considère le référentiel géocentrique comme galiléen) et à la force de Coriolis due à la rotation de la Terre.

$$* \quad d\vec{m} \vec{a} = d\vec{m} \vec{g} - \frac{d\vec{m}}{\rho} \text{grad } p - 2d\vec{m} \vec{\Omega} \vec{v}$$

I-4

\*

$$\vec{\Omega} \vec{v} = |\Omega \cos \lambda| \Omega \sin \lambda a \vec{u}_{align} |x' y'| \quad a = - \Omega \sin \lambda y' \quad \Omega \sin \lambda x' \quad - \Omega \cos \lambda x' a x' = \frac{a \cos q}{\rho} + 2 \Omega \sin \lambda y' y' = \frac{a \sin q}{\rho}$$

- \* Si le champ des vitesses est uniforme et indépendant du temps :

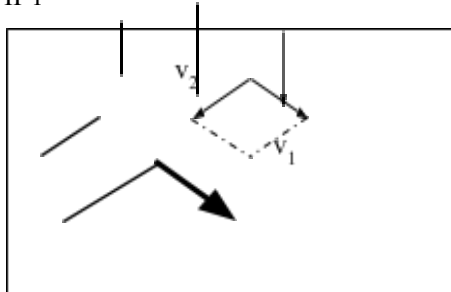
{

- \* Dans l'hémisphère sud, la vitesse serait en sens inverse ( $\lambda < 0$ ).

$$I-5 v = \frac{a}{2\rho\Omega\sin\lambda} = \frac{20.10^{-10}}{2 \cdot 1,3 \cdot \frac{2\pi}{86164} \sin 42} = 39,4 \text{ m/s}$$

### II - Propulsion d'un voilier.

II-1



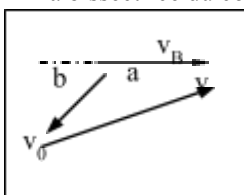
- \* La variation de la quantité de mouvement du fluide est égale à la quantité de mouvement du fluide dans  $A_2B_2C_2D_2$  diminuée de celle du fluide dans  $A_1B_1C_1D_1$ , car la quantité de mouvement du fluide dans  $C_1D_1A_2B_2$  est inchangée en régime permanent :

$$F_{\text{paroi} \rightarrow \text{fluide}}^{\vec{}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = - F_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}}^{\vec{}}$$

$$* \quad \frac{dm}{dt} = \rho S v$$

- \*  $F = \frac{dm}{dt} v \sin \frac{q}{2} = 2\rho S v^2 \sin \frac{q}{2}$  est dirigé dans la direction de

la bissectrice du coude du tuyau et vers l'extérieur de ce coude.



II-2

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{v}_B \quad v = \sqrt{v_0^2 + v_B^2 + 2v_0v_B\cos\beta} = \sqrt{25^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 25 \cos 60} = 24,8 \text{ m/s} \quad \tan\alpha = \frac{v_0 \sin\beta}{v_0 \cos\beta + v_B} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{v_0 \sin\beta}{v_0 \cos\beta + v_B}\right)$$

II-3

La force est dirigée dans la direction perpendiculaire à la voile qui fait un angle  $\alpha - j$  avec le cap du bateau :

$$F_x = F \sin(\alpha - j) \quad F = 2\rho S v^2 \sin \frac{q}{2} \quad q = 2j \quad S = S \sin j \quad F_x = 2\rho S v^2 \sin^2 j \sin(\alpha - j) \quad X = 2 \sin^2 j \sin(\alpha - j)$$

II-4

$j$  est compris entre 0 et  $\alpha$ . Dans cet intervalle  $X$  est positif et s'annule à ses deux extrémités, donc  $X(j)$  passe par un maximum à l'intérieur de l'intervalle, maximum qu'on obtient en annulant la dérivée :

$$X = 2 \sin^2 j \sin(\alpha - j) = 2 \sin \alpha \sin^2 j \cos j - 2 \cos \alpha \sin^3 j \quad \frac{dX}{dj} = 4 \sin \alpha \sin j \cos^2 j - 6 \cos \alpha \sin^2 j \cos j - 2 \sin \alpha \sin^3 j = 0 \quad 2 \sin j (2 \cos^2 j - 3 \sin j \cos j - \sin^2 j) = 0$$

Posons  $t = \tan j$  et divisons par  $-2 \sin \alpha \sin j$

$$\frac{dX}{dj} = 0 \quad \text{si}$$

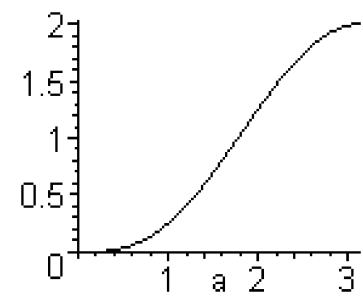
$$t^2 + 3 \cot \alpha t - 2 = 0 \quad j_0 = \arctan\left(\frac{\sqrt{9 \cot^2 \alpha + 8} - 3 \cot \alpha}{2}\right)$$

Pour être rigoureux, il faudrait montrer que  $0 \leq j \leq \frac{\pi}{2}$ .

La courbe  $X(\alpha)$  se trace avec une calculatrice programmable ; voici le

résultat avec maple ( $\alpha$  en radians porté en abscisse,  $X$  en ordonnée) :

```
> f:=arctan((sqrt((3/tan(a))^2+8)-3/tan(a))/2);
> X:=2*(sin(f))^2*sin(a-f);
> plot(X,a=0..Pi,color=black);
```

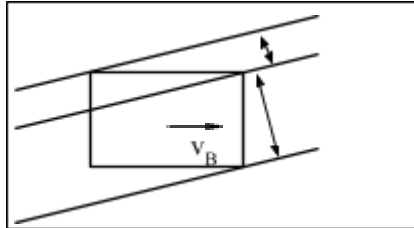


Voici une esquisse de calcul point par point :

si  $\alpha \ll 1$ ,  $X(j) = j^2(\alpha - j)$  maximum pour  $j = \frac{2\alpha}{3}$ ,  $X(\alpha, j_0) = \frac{4\alpha^3}{9}$  si  $\alpha = \frac{p}{2}$ ,  $X = 2\sin^2 j \cos j = 2\cos j - 2\cos^3 j$  maximum

II-5 Si  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cotan \alpha = 0$

$j_0 = \arctan(\sqrt{2}) = 54,7^\circ$   $X = 2\sin(54,7)\sin(90 - 54,7) = 0,77$   $F_x = 0,77 \cdot 1,3 \cdot 20 \cdot 30^2 = 18000 \text{ N}$   
(voir aussi question précédente)



II-6 ???

II-7

a) Si la coque est un parallélépipède de section  $s_0$  par un plan perpendiculaire à  $v_B$  et  $s_1$  par un plan vertical parallèle à  $v_B$ , l'expression de l'énoncé s'explique aisément (voir croquis ci-contre).

b) L'air réfléchi par  $s_1$  crée une force perpendiculaire à la vitesse du bateau ; seule compte la force exercée par l'air réfléchi par  $s_0$ . Cette

force se calcule en faisant dans la réponse à II-1  $S \rightarrow s_0 \cos \alpha$  et  $q \rightarrow p - 2\alpha$ , ou bien en faisant dans

l'expression de la force de II-3  $\alpha \rightarrow \frac{p}{2}$ ,  $S \rightarrow s_0$  et  $j \rightarrow \frac{p}{2} - \alpha$ . D'où :  $F = 2\rho s_0 v^2 \cos^2 \alpha$  qui est directement opposée au mouvement.

c) Cet angle limite correspond à l'égalité des composantes dans la direction du mouvement de la force motrice sur la voile et de la force sur la coque. Il faut résoudre :

$$F = 2\rho s_0 v^2 \cos^2 \alpha = \rho S v^2 X \Rightarrow X = \frac{2s_0}{S} \cos^2 \alpha = 0,16 \cos^2 \alpha$$

\* Maple donne

```
> f:=arctan((sqrt((3/tan(a))^2+8)-3/tan(a))/2);
```

```
> X:=2*(sin(f))^2*sin(a-f);
```

```
> fsolve(X=0.16*(cos(a))^2,a,0.05..1);
```

```
.6998058475
```

soit  $\alpha = 0,7 \text{ rad} = 40^\circ$

\* On peut se passer de calcul numérique en supposant que  $\alpha$  et  $j$  sont petits :

$X \gg 2j^2(\alpha - j)$  maximum pour  $j = \frac{2\alpha}{3} \Rightarrow X = 2\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2 \frac{\alpha}{3} = 0,16 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \sqrt[3]{0,16} = 0,81 \text{ rad}$  Bien qu'en réalité les angles ne soient pas petits, ce calcul donne un bon ordre de grandeur, à défaut d'une valeur exacte.

On peut aussi construire la courbe  $0,16 \cos^2 \alpha$  en la superposant au graphique de  $X(\alpha)$  tracé précédemment.

## Problème B. Chute d'une tartine beurrée.

I.1. Comme il n'y a pas de glissement, le travail de la réaction du coin est nul et l'énergie se conserve.

I.2. Exprimons la conservation de l'énergie entre le départ et la position pour laquelle la tartine a tourné de

l'angle  $\theta$  :

$$\frac{1}{2} I \dot{q}^2 + mgb \cos q = mgb \Rightarrow \dot{q}^2 = \frac{2mgb(1-\cos q)}{I} \Rightarrow \dot{q} = \sqrt{\frac{4mgb}{I}} \sin \frac{q}{2}$$

En dérivant l'équation de la conservation de l'énergie :

$$I \dot{q} \ddot{q} - mgb \sin q \dot{q} = 0 \Rightarrow \ddot{q} = \frac{mgb \sin q}{I}$$

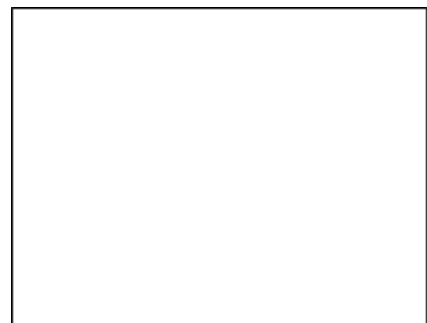
On peut aussi obtenir cette expression en dérivant l'expression de  $\dot{q}$ .

$$\text{II. 1. } R^{\rightarrow} + mg^{\rightarrow} = ma_c^{\rightarrow}$$

{

$$\frac{mb^2}{I} \gg \frac{3b^2}{a^2} = 0,03 \text{ est petit, donc les courbes ressemblent à } \cos \theta \text{ et } \sin \theta.$$

II. 2. Tant que  $N$  reste positif, il n'y a pas de décollage. Par contre, le rapport  $T/N$  tend vers l'infini pour  $\theta = 86,7^\circ$ , avant que  $N$  ne devienne négatif (voir graphique), ce qui implique que le glissement apparaît avant le décollage.



II. 3.  $f = \left| \frac{T}{N} \right|$  est voisin de 1 puisque  $q = q_0 = \frac{p}{4}$  au début du glissement.

III. 1.  $q'_0 = \sqrt{\frac{2mgb(1-\cos q_0)}{I}}$

III. 2. 1. Le plan vertical perpendiculaire au coin passant par la position initiale de C est un plan de symétrie, et C y reste.

III. 2. 2. Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique, compte tenu de ce que le moment en C des forces est nulle, puisque la seule force appliquée est le poids, montre que le moment cinétique en C reste constant ; comme la tartine est solide, son moment d'inertie en C reste constant, donc  $q'$  reste constant.

III. 2. 3. La composante verticale de la vitesse initiale  $bq'_0 \sin q_0$  est petite parce que la variation d'altitude de C

est minime. On peut donc la négliger :  $z = h - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

III. 2. 4.

$$q = q_0 + q'_0 t = \frac{p}{4} + \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{2mgb(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}{I_c}} = \frac{p}{4} + \sqrt{\frac{4mbh(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{3}m(a^2+b^2)}} \gg \frac{p}{4} + \sqrt{\frac{12 \cdot 0.4 \cdot 70(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}{4^2}} = 3,27 \text{ rad Ce}$$

résultat est très voisin de  $180^\circ$  et montre que la tartine arrive à plat sur sa face beurrée.

III. 2. 5. Pour arriver à plat sur le côté non beurré, il faut que la tartine tourne de  $2p - \frac{p}{4}$ , correspondant à

une hauteur de chute de  $70 \left( \frac{7p/4}{3,26 - p/4} \right)^2 = 340 \text{ cm}$ . Le géant qui utiliserait cette table serait haut de

$$\frac{340 \cdot 1,70}{70} = 8 \text{ mtres.}$$