

Теорема Менелая

Пусть прямая пересекает треугольник ABC , причем C' - это точка ее пересечения со стороной AB , A' - точка ее пересечения со стороной BC и B' - точка ее пересечения с продолжением стороны AC (рис. 1). Тогда имеет место соотношение:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

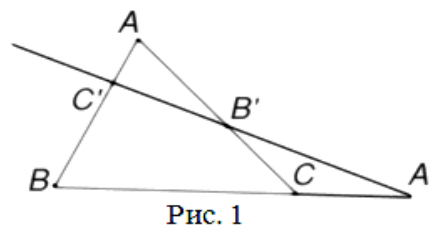
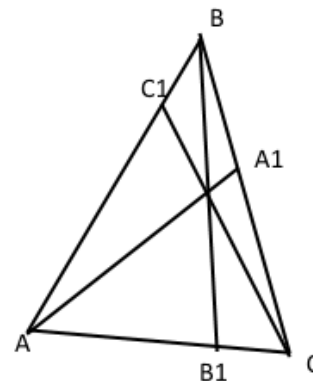


Рис. 1

Легко заметить, что при составлении равенства надо переходить от одной вершины к другой через точку пересечения секущей с этой стороной или ее продолжением; заканчивать надо в той вершине, с которой начинали обход.

Теорема Чевы

Пусть в треугольнике ABC точка A_1 лежит на стороне BC , точка B_1 — на стороне AC , точка C_1 — на стороне AB . Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

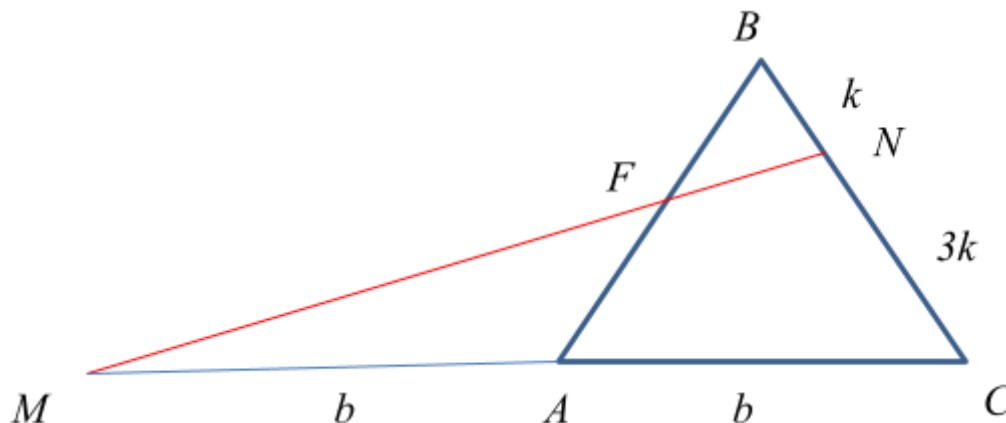


Обход можно начинать делать с любой вершины. Отрезки прямых BB_1 ; AA_1 ; CC_1 - «чевяны» названы по имени автора теоремы. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника — примеры чевянов.

ЗАДАНИЯ

1. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что $NC = 3BN$; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что $MA = AC$.

Прямая MN пересекает сторону AB в точке F .
Найти отношение $\frac{BF}{FA}$.



Решение:

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1$$

$$\frac{3k}{k} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{b}{2b} = 1$$

$$\frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}.$$

2. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и K , такие, что $AM:MB=2:1$, $AK:KC=3:2$. Отрезки CM и BK пересекаются в точке O . Найти $BO:OK$ и $MO:MC$ (учебник, стр. 47).

Решение:

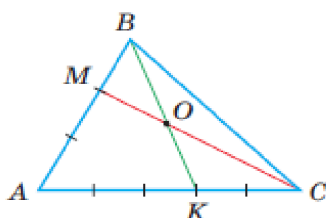


Рис. 80

Решение. Способ 1 (теорема Менелая). Рассмотрим $\triangle ABK$ (рис. 80). Прямая MC пересекает две его стороны AB и BK соответственно в точках M и O и продолжение третьей стороны AK в точке C . По теореме Менелая $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{KC}{CA} = 1$, откуда $\frac{2}{1} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{2}{5} = 1$,

$$\frac{BO}{OK} = \frac{5}{4}.$$

Способ 2 (теорема Фалеса обобщенная). Проведем $KE \parallel CM$ (рис. 81). По теореме Фалеса $\frac{AE}{EM} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$. Тогда AE — три части, EM — две части, AM —

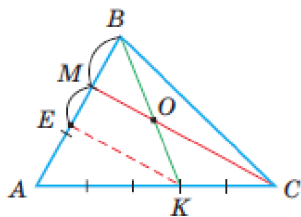


Рис. 81

пять частей, откуда $EM = \frac{2}{5}AM = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}AB = \frac{4}{15}AB$.

Но $MB = \frac{1}{3}AB$. Отсюда $\frac{MB}{EM} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{4}{15}AB} = \frac{5}{4}$. Для $\angle KBE$

по теореме Фалеса $\frac{BO}{OK} = \frac{BM}{ME} = \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения с самопроверкой

1. Точка B_1 лежит на стороне AC , точка A_1 на стороне BC треугольника ABC , $AB_1:B_1C = 1:2$, $BA_1:A_1C = 1:3$. отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Найдите $BO:OB_1$; $AO:OA_1$; $AC_1:C_1B$, где C_1 пересечение A_1B_1 и AB (1; 2; 3).
2. В треугольнике ABC , описанном около - окружности $AB=8$; $BC=5$; $AC=4$. A_1 и C_1 точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC и BA . P -точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1 . Точка P лежит на биссектрисе BB_1 . Найдите $AP : PA_1$ (70:9).
3. В треугольнике ABC точки K и L принадлежат соответственно сторонам AB и BC . $AK:BK = 1:2$; $CL:BL= 2:1$. Q - пересечение прямых AL и CK . Площадь треугольника BQC равна 1. Найдите площадь треугольника ABC (1,75).
4. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого 1, из вершины A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q . Найдите площадь четырехугольника $QMCD$ (5/12).
5. Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований 8 и 6. Через точку E , лежащую на стороне CD , проведена прямая BE , которая делит диагональ AC , точкой пересечения O , в отношении 3:2 считая от точки A . Найдите площадь треугольника OEC (9,6).
6. Биссектрисы BE и AD треугольника ABC пересекаются в точке Q . найдите площадь треугольника ABC , если $S_{\Delta BQD}=1$. $2AC = 3AB$, $3BC = 4AB$ (115:16).
7. В треугольнике ABC , площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K так, что $AK:BK=2:3$, а на стороне AC – точка L так, что $AL : LC= 5:3$. Q - пересечение отрезков BL и CK , удалена от прямой AB на расстоянии $3/2$. Найдите длину стороны AB (4).
8. Дан треугольник ABC . Точка P лежит на стороне AB , точка Q – на стороне BC , причем $AP:PB = 2:5$, $BQ : QC = 6$. Отрезок PQ пересекает медиану BM в точке R . Найдите $BR:RM$. (5:4)
9. На медиане AD треугольника ABC взята такая точка M , что $AM : MD=1 : 3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC ? (1:2, считая от вершины A)
10. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $AC = 2 CN$. Точка M лежит на стороне BC , причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB ? ($AE:EB=9:1$)
11. На стороне NP квадрата $MNPQ$ взята точка A , а на стороне PQ - точка B так, что $NA:AP=PB:BQ = 2:3$. Точка L – точка пересечения отрезков MA и NB . В каком отношении точка L делит отрезок MA ? (25:4)