

Definició

Un sistema dinàmic és, la representació matemàtica d'un procés que si es coneix el patró d'evolució i el estat inicial, es pot conèixer qualsevol estat futur del sistema. Però en aquests sistemes, el que tractem no es trobar solucions exactes a la equació del sistema dinàmic, més bé el que tractem és, trobar si se estabilitzarà en un punt determinat o si anirà al voltant d'un altre (punt atractor).

Aquests sistemes dinàmics donen suport moltes vegades a qüestions biològiques com la propagació d'una infecció, el desenrotllament d'un gen determinat o la creixença d'una població al llarg dels anys, ens trobem amb dues constants que van variant contínuament i per tant fa falta un sistema especial per a aquest tipus, que faci tot aquest treball més fàcil.

Tipus de funcions dinàmiques

Els sistemes dinàmics poden dividir-se en dos grans grups: aquells en els que el temps varia contínuament i aquell en els que el temps varia discretament, sistemes continus o discrets respectivament. En aquest cas en centrarem en els sistemes discrets i en el seu ús més freqüent, per a la descripció del canvi de tamany de les poblacions.

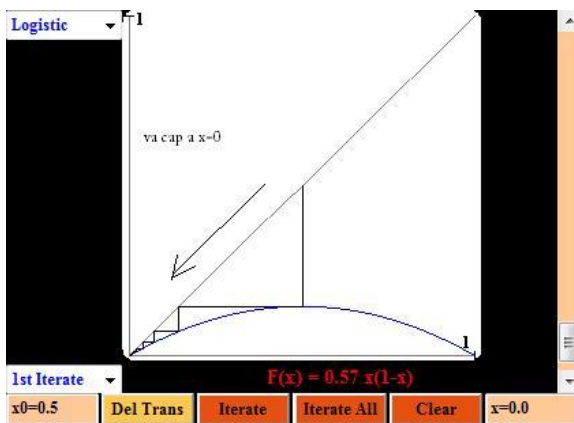
Començarem per el cas més senzill, podem suposar que la població de qualsevol organisme té una certa quantitat de descendents en un temps donat. Si anomenem al la quantitat de individus que hi ha al origen com a N_0 , i la seua taxa de reproducció com a r , podem dir que $N_1 = r \cdot N_0$, és a dir la quantitat del principi multiplicada per la taxa de reproducció en un temps determinat ens dona el tamany de la població. Si apliquem aquesta formula recursivament(al nombre del principi li apliquem la formula i al resultat li apliquem la formula, així contínuament) sort un patró $\rightarrow N_t = r \cdot N_{t-1}$. Aquesta formula vol dir que la població en qualsevol temps(t) es pot multiplicar per un factor per a que ens done que el tamany de la població en eixe moment.

Però nosaltres anem a treballar amb un model més realista que el el cas anterior ja que anem a afegir-li uns factors que modifiquen el tamany de la població com per exemple la capacitat de carga del medi ambient, es a dir, la capacitat que té el medi ambient per a suportar determinada població. Anem a normalitzar el tamany de la població a 1 per a vore des d'un punt de vista matemàtic. El nou model quedaria així:

$$X_{t+1} = r X_t (1 - X_t)$$

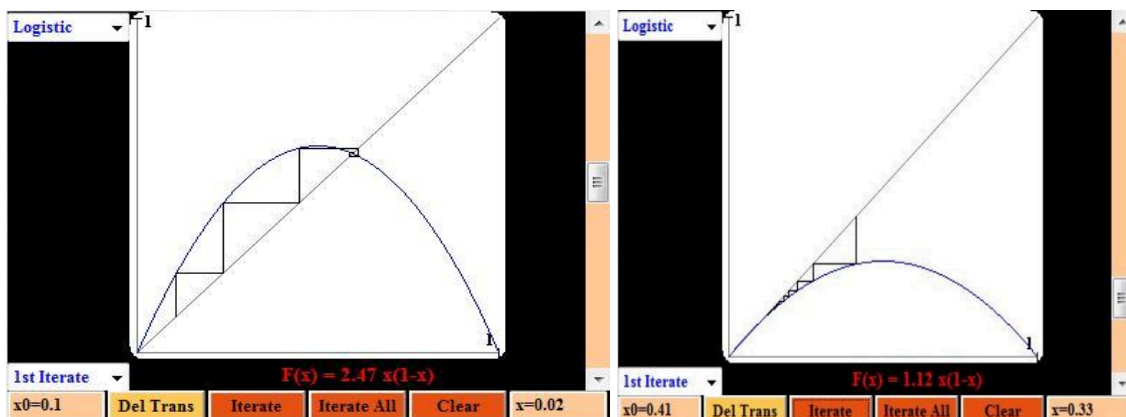
En aquest cas també r es la taxa de reproducció i x la capacitat de carga.

Anem a analitzar el seu comportament variant la taxa de reproducció. Primerament analitzarem el comportament de la població amb una taxa de reproducció menor de 1.

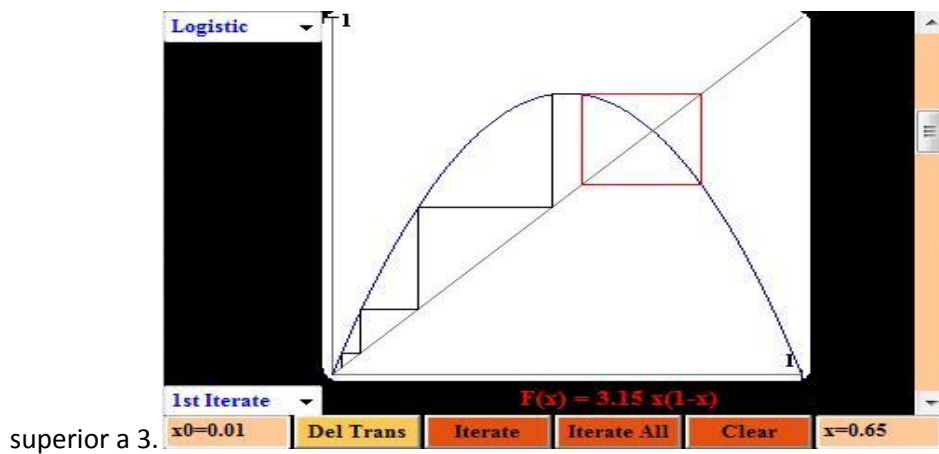


Com podem veure la població amb una taxa de reproducció menor de 1 acaba donant $x=0$, és a dir, acaba desapareixent. De fet, qualsevol nombre positiu menor de 1 i 1 acaba en $x=0$, és a dir, que la població ha de tindre una taxa de reproducció major de 1 per a sobreviure segons aquesta gràfica.

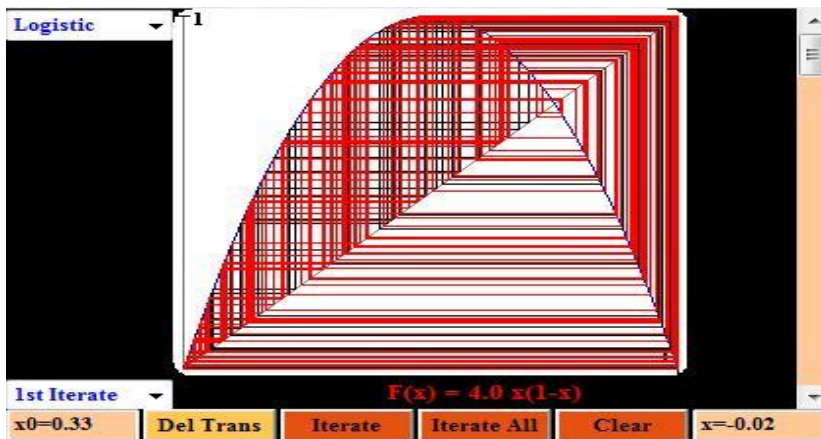
A continuació anem a veure que passa donant a la població una taxa de reproducció que es trobe entre 1 i 3.



Com podem observar en les anteriors gràfiques amb una taxa de reproducció que no aplega a 2 s'estabilitza en un punt i del 2 cap amunt comencem a trobar un punt atractor al que tendeix la població i s'estabilitza. Ara volem que passa amb una taxa de reproducció



A partir del tres podem observar que comencen a aparèixer oscil·lacions repetides que indiquen que hi ha un atractor de període 2 i quan més ens apropem a 4 com a taxa de reproducció parlem de períodes molt alts com podem veure en la següent gràfica:



Amb la taxa de reproducció 4 aplega a tots els punts de la paràbola. Aquest es diu caos, és a dir, valors inicials que es troben a prop acaben en uns valors finals que es troben lluny. Normalment per a aquestos casos de creixement de població es sol treballar fins a 4 ja que si ens passem com per exemple 5 es va cap a nombres negatius i per tant no ens interessa.