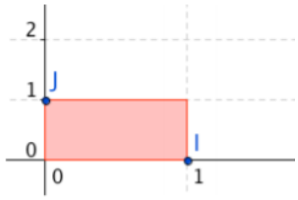
Chapitre XII : Intégration et primitives - partie I

Histoire des maths :
Même si la notion d'intégrale a été évoquée il y a plusieurs siècles, par exemple en Grèce Antique, il faut attendre le milieu du XVIIe siècle pour qu'elle prenne la forme aboutie qu'on utilise désormais.
Le mathématicien **Bernhard Riemann** (1826-1866) a largement contribué à cette branche des mathématiques.

I. Intégrale d'une fonction positive

Définition d'une unité d'aire

Dans un repère (O, I, J), on appelle unité d'aire (u.a), l'aire du rectangle de côtés [OI] et [OJ].

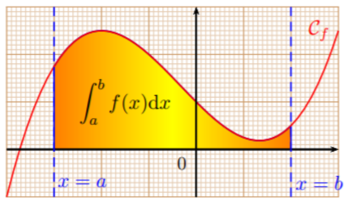


Exemple : L'aire du rectangle vert vaut 8 u.a car cette aire est égale à 8 fois celle du rectangle rouge.

Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.
On considère la fonction f **continue et positive sur** $[a\,;\,b]$
On appelle l'intégrale de a à $b$de la fonction f l'aire (en unités d'aires du repère) de la surface du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

Cette aire est notée : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Elle se lit : intégrale de a à b de f
a est appelé la borne inférieure
b est appelé la borne supérieure
Les intégrales peuvent servir à calculer des aires de figures non usuelles

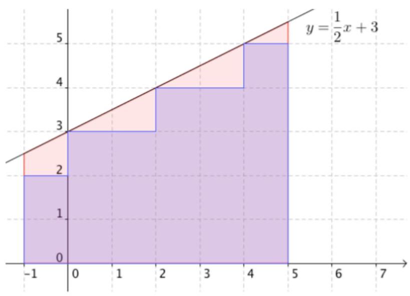
Remarque : La variable x peut être remplacée par toute autre variable, on dit que cette variable est "muette".

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Remarque : Cette notation est due au mathématicien allemand **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégrale est égale à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$; $\int_{-1}^{5} f(x)dx$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$. On obtient :

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = 21u.a + 3u.a = 24u.a$$



L'aire vaut 24 unités d'aire.

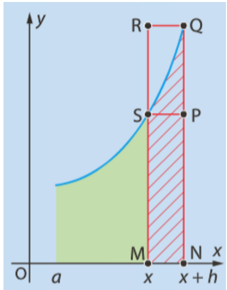
II. Primitives d'une fonction continue

Théorème fondamental

Si f est une fonction continue et positive sur $[a\,;\,b]$, la fonction F définie sur $[a\,;\,b]$par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et a pour dérivée f. On a ainsi $F'(x) = f(x)$pour tout $x \in [a\,;\,b]$



Dém : Non exigible
On ne démontre ce théorème que dans le cas où la fonction f est strictement croissante et positive sur $[a\,;\,b]$
Soient x et $x + h$ deux réels de l'intervalle $[a\,;\,b]$avec $h > 0$.

On a : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$

Puisque la fonction f est positive sur $[a\,;\,b]$, $F(x)$ est l'aire de la surface colorée en vert et la différence $F(x + h) - F(x)$ est l'aire de la surface hachurée en rouge.
Cette aire est comprise entre les aires des rectangles MNPS et MNQR.
Or $Aire_{MNPS} = h \times f(x)$ et $Aire_{MNQR} = h \times f(x + h)$
Puisque f est croissante sur $[a\,;\,b]$, on a $h \times f(x) \leq F(x + h) - F(x) \leq h \times f(x + h)$
Donc $f(x) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x + h)$ car $h > 0$
Or f est continue sur $[a\,;\,b]$donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ et d'après le théorème des "gendarmes"

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

On peut effectuer le même travail lorsque $h < 0$, donc la fonction F est dérivable en tout point x de $[a\,;\,b]$ et $F'(x) = f(x)$.

Définition d'une primitive d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est égale à f.
Ainsi pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Remarque : D'après le théorème précédent, toute fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$admet une primitive la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

Voici une généralisation :

Théorème d'existence des primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Dém : Non exigible
On démontre ce théorème que dans le cas où $I = [a\,;b]$et f admet un minimum m.
Soit la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - m$
g est continue et positive sur I donc d'après le théorème précédent, la fonction $g$admet une primitive G.
Soit $F(x) = G(x) + mx$. F est dérivable sur I et $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x)$
Donc F est une primitive de f sur I.

Propriétés
• Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel. • Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$

Dém :

- Soit G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ alors $G'(x) = F'(x) = f(x)$ donc G est une primitive de f sur I.

Soit G une autre primitive de f sur I, on a $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$ donc $G - F$ est une fonction constante sur I, soit $G(x) = F(x) + k$ avec k réel.

- Il existe une unique primitive de f telle que $F(x_0) = y_0$ puisqu'il existe une seule valeur de k telle que $G(x_0) + k = y_0$

III. Calculs des primitives

Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	**Une primitive F**	**Intervalle de validité**
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ pour n entier différent de -1 et 0	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ lorsque $n > 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ lorsque $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

Formes remarquables

Primitive de la somme	$\int(u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int(au) = a\int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} = \ln\lvert u\rvert$
Primitive de $\frac{u'}{u^n}$ $n \neq 1$	$\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $u(ax+b)$	$\int u(ax+b) = \frac{1}{a}U(ax+b)$

Dém :

- Produit par un scalaire : $(kF)' = kF' = kf$ donc kF est une primitive de kf.
- Somme : $(F + G)' = F' + G' = f + g$ donc $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- exponentielle : $(e^u)' = u'e^u$ donc e^u est une primitive de $u'e^u$

Exemples :

- Une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = \frac{x^4}{4}$
- Toutes les primitives de la fonction f définies par $f(x) = 2xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telle que $F(x) = -e^{-x^2} + k$