



Chapitre 06

Variables aléatoires discrètes

📺 Tout le cours en vidéo <https://youtu.be/xMmfPUoBTtM>

I. Rappels sur les variables aléatoires

On définit une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est noté Ω . Une **variable aléatoire** X est une fonction de l'ensemble fondamental Ω à valeurs dans R .

Lorsque la variable X est à valeurs dans un ensemble discret de R (autrement dit, les valeurs de cet ensemble sont isolées dans R), on parle de **variable aléatoire discrète**.

On se place dans le cas discret. I est une partie de N . X est une variable aléatoire réelle tel que $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$

L'**espérance** d'une variable aléatoire est donnée par la formule

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots$$

Méthode

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

📺 Vidéo <https://youtu.be/AcWVxHgtWp4>

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. »

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

Solution

1. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7. En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne

$$5 (\text{roi}) + 2 (\text{cœur}) = 7\text{€}$$

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = 2$

$$P(X = 2) = \frac{7}{32}$$

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 5$

$$P(X = 5) = \frac{3}{32}$$

- Si la carte tirée est le roi de cœur, $X = 7$

$$P(X = 7) = \frac{1}{32}$$

- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = -1$

$$P(X = -1) = \frac{21}{32}$$

La loi de probabilité de X est donc donnée par le tableau suivant.

x_i	-1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

2. L'espérance de X égale

$$E(X) = (-1) \times \frac{21}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 5 \times \frac{3}{32} + 7 \times \frac{1}{32} = \frac{15}{32} = 0,46875$$

L'**espérance** est la valeur que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Cela signifie donc qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne environ 0,47€ à chaque fois que l'on a joué. Si l'on joue mille fois par exemple, on peut espérer un gain qui s'approchera de 468,75€, sans évidemment pouvoir atteindre ce gain... On perçoit ici la loi des grands nombres qui vient montrer ce phénomène.

II. Schéma de Bernoulli, loi binomiale

1. Épreuve de Bernoulli

On réalise une expérience aléatoire qui a **2 résultats possibles** : le succès **S**, de probabilité p , et l'Échec **E** de probabilité $1 - p$.

Soit X la variable aléatoire définie sur $\Omega = \{S; E\}$ telle que $X(S) = 1$ et $X(E) = 0$.

X suit une **loi de Bernoulli** (savant suisse 1654-1705). On écrit :

$$X \sim B(p)$$

On note aussi

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p$$

Exemples

- **Le jeu du pile ou face**

On considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ». Si la pièce est équilibrée (non truquée), la probabilité d'un succès est égale à

$$p = \frac{1}{2}$$

- On lance un dé à 6 faces et on considère comme succès « obtenir 6 » et comme échec « ne pas obtenir 6 ». Si le dé est équilibré, la probabilité d'un succès est égale à

$$p = \frac{1}{6}$$

2. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p .

Une **loi binomiale** est une loi de probabilité qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Exemple

Lors d'un jeu de pile ou face, la répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 1/2$

Remarque

n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n; p)$.

Exemple

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p . X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.

$$X \sim B(3, p)$$

Ainsi

$$P(X = 3) = p^3$$

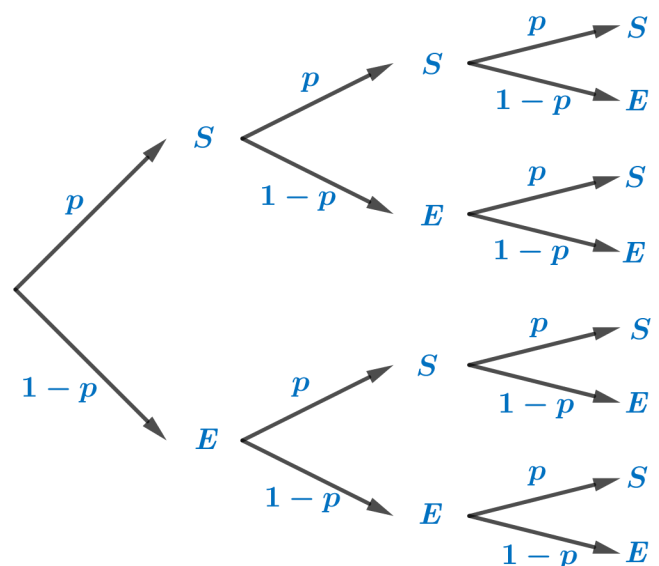
En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité de

$$p \times p \times p = p^3$$

$X = 2$ correspond à 2 succès et un échec, soit 3 possibilités

- (Succès ; Succès ; Échec)
- (Succès ; Échec ; Succès)
- (Échec ; Succès ; Succès)

$$\text{Donc } P(X = 2) = 3p^2(1-p)$$



Méthode

Calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide d'un arbre

 Vidéo https://youtu.be/b18_r8r4K2s

On tire trois fois de suite avec remise une carte dans un jeu de 4 cartes qui contient une carte Nemo. On considère comme succès l'événement « Obtenir la carte Nemo ». X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Calculer $P(X = 2)$. Interpréter le résultat.

Solution

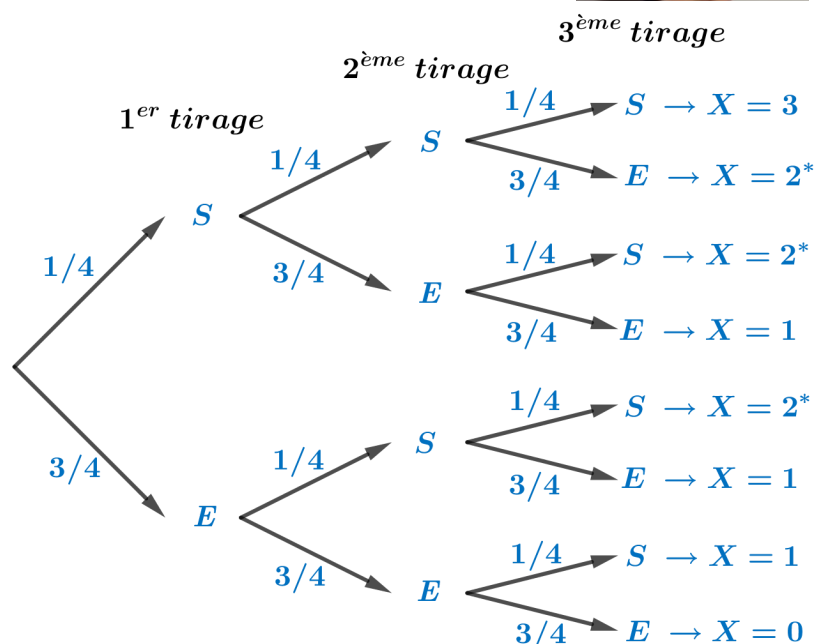
La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 1/4$

$$X \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$$

On représente dans un arbre de probabilité les issues de l'expérience composée de 3 tirages. À l'issue du chemin, on comptabilise les succès et les échecs. On cherche à calculer $P(X = 2)$, on repère donc les chemins présentant deux succès (*). On en compte 3. Chacun de ces chemins correspond au calcul de probabilité

$$\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Et donc



$$P(X = 2) = 3 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{9}{64}$$

La probabilité d'obtenir deux fois la carte Nemo sur 3 tirages est égale à 9/64

3. Avec la calculatrice ou un tableur

Méthode

Utiliser une loi binomiale

 Vidéo <https://youtu.be/7k4ZYdfWEY8> - Tuto TI

 Vidéo <https://youtu.be/69IQIJ7lyww> - Tuto Casio

 Vidéo <https://youtu.be/clrAMXKrPV4> - Tuto HP

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces équilibré. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

a. Quelle est la loi suivie par X ?

b. Calculer la probabilité $P(X = 5)$.

c. Calculer la probabilité $P(X \leq 5)$.

d. Calculer la probabilité $P(X \geq 3)$.

Solution

a. On répète 7 fois une expérience à deux issues, {3 ; 4 ; 5 ; 6} et {1 ; 2}. Le succès est d'obtenir {3 ; 4 ; 5 ; 6}. La probabilité du succès sur un tirage égale

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 2/3$

$$X \sim B\left(7, \frac{2}{3}\right)$$

b. La probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31.

$$P(X = 5) \approx 0,31$$

Avec Texas Instruments	Avec Casio	Avec le tableur
	Touche « OPTN » puis choisir « STAT », « DIST », « BINM », « Bpd »	Saisir dans une cellule

Touche « 2nd » et « VAR » puis choisir « binomFdP » et saisir les paramètres de l'énoncé. Il s'affiche alors <i>binomFdP(7, 2/3, 5)</i>	» et saisir les paramètres de l'énoncé. Il s'affiche alors <i>BinomialePD(5, 7, 2/3)</i>	$= LOI.BINOMIALE(5; 7; \frac{2}{3}; 0)$
--	--	---

c. La probabilité d'obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74.

$$P(X \leq 5) \approx 0,74$$

Avec Texas Instruments Touche « 2nd » et « VAR » puis choisir « binomFRéP » et saisir les paramètres de l'énoncé. Il s'affiche alors <i>binomFRéP(7, 2/3, 5)</i>	Avec Casio Touche « OPTN » puis choisir « STAT », « DIST », « BINM », « Bcd » et saisir les paramètres de l'énoncé. Il s'affiche alors <i>BinomialeCD(5, 7, 2/3)</i>	Avec le tableur Saisir dans une cellule $= LOI.BINOMIALE(5; 7; \frac{2}{3}; 1)$
---	--	--

d. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,045 \approx 0,955$

4. Représentation graphique

Méthode

Établir une loi binomiale avec une calculatrice ou un tableur

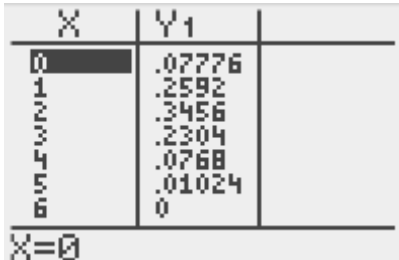
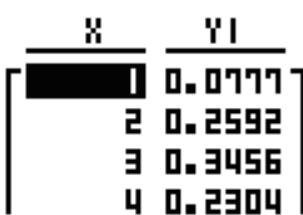
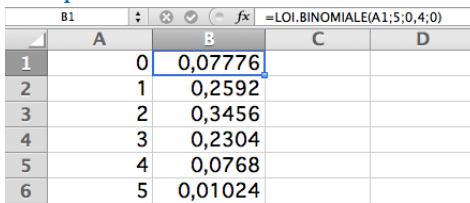
 Vidéo <https://youtu.be/8f-cfVFHlxg> - Tuto TI

 Vidéo <https://youtu.be/I9OoHVRpM8U> - Tuto Casio

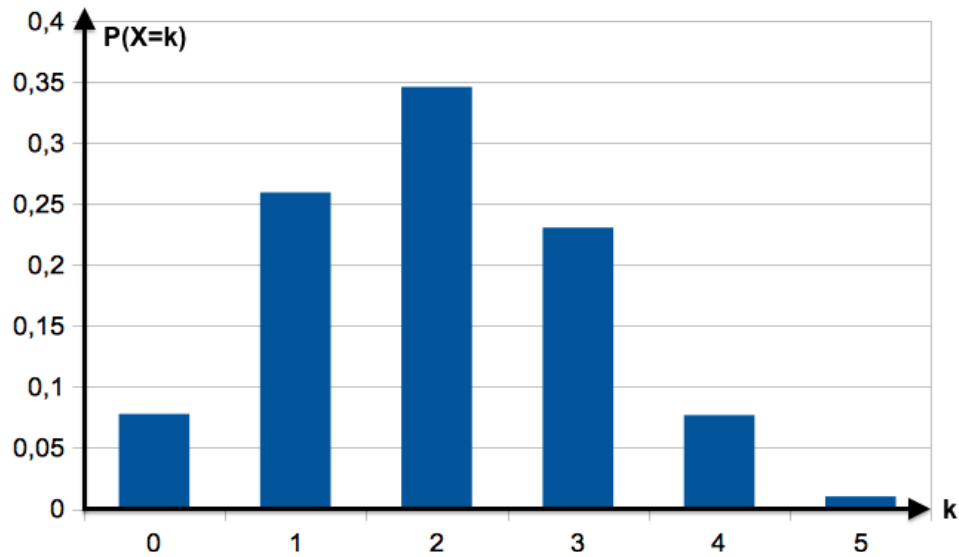
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,4$. Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

Solution

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant $P(X = k)$ pour k entier, $0 \leq k \leq 5$.

Avec Texas Instruments Touche « Y = » et saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3. Plot1 Plot2 Plot3 Y1:binomFdp(5,0.4,X) Afficher la table : touches « 2nd » et « GRAPH ». 	Avec Casio Dans « MENU », choisir « TABLE ». Saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3. Table Func : Y= Y1:BinomialPD(X,5,0.4) Afficher la table : touche « TABL ». 	Avec le tableur Saisir dans la cellule B1 $= LOI.BINOMIALE(A1; 5; 0,4; 0)$ Et copier cette formule vers le bas.  Puis, dans le menu insertion, histogramme
--	--	---

On représente ensuite la loi binomiale par un diagramme en bâtons.



5. Espérance de la loi binomiale

Propriété

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètre n et p . $X \sim B(n, p)$

$$E(X) = n \times p$$

Exemple

On lance 5 fois un dé à six faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès. Ainsi, $X \sim B(5, 1/3)$

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1,7$$

On peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6 en 5 lancers.

Méthode

Calculer l'espérance d'une loi binomiale

Vidéo <https://youtu.be/95t19fznDOU>

Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte. Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point. On répond au hasard à chaque question. Quelle note peut-on espérer obtenir ?

Solution

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses. Ainsi, $X \sim B(8, 1/3)$

$$E(X) = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

On peut donc espérer obtenir 1,33 points en répondant au hasard.

$$\frac{8}{3} \times 0,5 = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

III. Coefficients binomiaux

1. Définition et propriétés

Exemple

Vidéo <https://youtu.be/-gvlrFdaS8>

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p . X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès. Combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves ?

Il existe **3 façons** de choisir 2 succès parmi 3 tirages (SSE, SES ou ESS). On parle alors de « **combinaison de 2 parmi 3** » et on note $\binom{3}{2} = 3$

Définition

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètre n et p .

On appelle **coefficient binomial** ou **combinaison de k parmi n** , noté $(n \ k)$, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.

Propriétés

Soit n et k des entiers naturels tels que $k \leq n$

$$(n \ 0) = 1 \quad (n \ n) = 1 \quad (n \ 1) = n \quad (n \ k) = (n \ n - k)$$

Démonstrations

- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à 0 succès parmi n épreuves : EEE...E
- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à n succès parmi n épreuves : SSS...S
- Il y a n chemins correspondant à 1 succès parmi n épreuves : on place le succès à chacun des n tirages de l'expérience.
- La dernière formule traduit le fait que choisir la place des k succès revient à choisir les $n - k$ échecs.

Avec la calculatrice

Il est possible de vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice. La fonction se nomme « *combinaison* » ou « *nCr* ».

Pour calculer $(25 \ 24)$, on saisit « 25*combinaison*24 » ou « 25*nCr*24 » suivant le modèle de calculatrice.

Avec un tableau

La fonction se nomme « **COMBIN** ». Pour calculer $(25 \ 24)$, on saisit $= \text{COMBIN}(25; 24)$

2 Triangle de Pascal

Propriété du triangle de Pascal

$$(n \ k) = (n - 1 \ k - 1) + (n - 1 \ k)$$

Démonstration pour $n = 5, k = 3$

Montrons que $(5 \ 3) = (4 \ 2) + (4 \ 3)$

Il y a deux types de chemins comportant 3 succès parmi 5 épreuves :

- Ceux qui commencent par un succès : il y en a 2 parmi 4, soit $(4 \ 2)$. En effet, dans l'arbre, il reste à dénombrer 2 succès parmi 4 expériences.
- Ceux qui commencent par un échec : il y en a 3 parmi 4, soit $(4 \ 3)$. En effet, dans l'arbre, il reste à dénombrer 3 succès parmi 4 expériences.

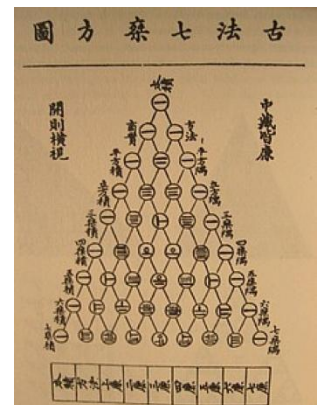
Ces deux types de chemins sont disjoints, donc $(5 \ 3) = (4 \ 2) + (4 \ 3)$

Remarque

La démonstration du cas général reprend le même argument.

Blaise Pascal (1623 – 1662) fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui « **triangle de Pascal** ». Son but est d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. Cette méthode était déjà connue des perses mais aussi du mathématicien chinois **Zhu Shi Jie** (XIIe siècle).

Ci-contre, le triangle de **Zu Shi Jie** extrait de son ouvrage intitulé **Su yuan zhan** (1303).



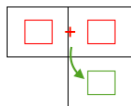
Le tableau qui suit utilise la propriété du triangle de Pascal et permet de trouver de proche en proche les premières combinaisons. Par exemple, ci-dessous, on note que

k n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	

6	1	6	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{0}$	$\frac{1}{5}$	6	1
---	---	---	---------------	---------------	---------------	---	---

$$(5 \ 3) + (5 \ 4) = 10 + 5 = 15 = (6 \ 4)$$

 **Vidéo** <https://youtu.be/6JGrHD5nAoc>



IV. Application à la loi binomiale

1. Probabilité d'une loi binomiale à l'aide des coefficient binomiaux

Propriété

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n, p)$.

$$P(X = k) = (n \ k) p^k (1 - p)^{n-k}$$

Méthode

Calculer les probabilités d'une loi binomiale

 **Vidéo** <https://youtu.be/1gMq2TJwSh0>

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

1. Prouver que X suit une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

Solution

1. On répète 4 fois une expérience à deux issues : soit la boule est gagnante soit la boule est perdante.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $5/12$. On en déduit que $X \sim B(4, 5/12)$

$$2. P(X = 3) = (4 \ 3) \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{4-3} = 4 \times \left(\frac{5}{12}\right)^3 \times \frac{7}{12} = 4 \times \frac{125}{1728} \times \frac{7}{12} = \frac{875}{5184} \approx 0,17$$

Remarque

On détermine la valeur de la combinaison $(4 \ 3)$ à l'aide du triangle de Pascal ou à l'aide des formules suivantes.

Propriétés

- Soit n et k des entiers naturels tels que $k \leq n$

$$(n \ k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \times 1}$$

$n!$ désigne le produit $n(n-1)\times\dots\times 3\times 2\times 1$ et se lit « factorielle n »

Ainsi,

$$(4 \ 3) = (4 \ 1) = \frac{4}{1} = 4$$

On remarque par ailleurs que, en appliquant la deuxième égalité,

$$(4 \ 3) = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = \frac{4}{1} = 4$$

Ou encore, en appliquant la première égalité

$$(4 \ 3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 1} = \frac{4}{1} = 4$$

Par convention, $0! = 1! = 1$

La loi binomiale avec la calculatrice

 **Vidéo** <https://youtu.be/ZIy1AWJu8tg> (avec TI)

 **Vidéo** <https://youtu.be/TO1ym3IJCQo> (avec Casio)

 **Vidéo** <https://youtu.be/RZsNHNhWlsg> (avec HP)