Выражения и их тождественные преобразования

Наряду с изучением операций и их свойств в алгебре изучают такие понятия, как ***выражение, уравнение, неравенство***. Первоначальное знакомство с ними происходит в начальном курсе математики. Вводятся они, как правило, без строгих определений, чаще всего **остенсивно**, что требует от учителя не только большой аккуратности в употреблении терминов, обозначающих эти понятия, но и знания ряда их свойств. Поэтому главная задача, которую мы ставим, приступая к изучению материала данного параграфа, - это уточнить и углубить знания о выражениях (числовых и с переменными), числовых равенствах и числовых неравенствах, уравнениях и неравенствах.

Изучение данных понятий связано с использованием математического языка, он относится к искусственным языкам, которые создаются, и развиваются вместе с той или иной наукой. Как и любой другой математический язык имеет свой алфавит. В нашем курсе он будет представлен частично, в связи с необходимостью больше внимания уделить взаимосвязи алгебры с арифметикой. В этот алфавит входят:

1) цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; с их помощью по специальным правилам записываются числа;

2) знаки операций +, -, •, :;

3) знаки отношений <, >, =, M;

4) строчные буквы латинского алфавита, их применяют для обозначения чисел;

5) скобки (круглые, фигурные и др.), их называют техническими знаками.

Используя этот алфавит, в алгебре образуют слова, называя их выражениями, а из слов получаются предложения - числовые равенства, числовые неравенства, уравнения, неравенства с переменными.

Как известно, записи $3 + 7$, $24 : 8$, $3 \times 2 - 4$, $(25 + 3) \times 2 - 17$ называются ***числовыми выражениями.*** Они образуются из чисел, знаков действий, скобок. Если выполнить все действия, указанные в выражении, получим число, которое называется ***значением числового выражения***. Так, значение числового выражения $3 \times 2 - 4$ равно 2.

Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти. Про такие выражения говорят, что они ***не имеют смысла***.

Например, выражение $8 : (4 - 4)$ смысла не имеет, поскольку его значение найти нельзя: $4 - 4 = 0$, а деление на нуль невозможно. Не имеет смысла и выражение 7-9, если рассматривать его на множестве натуральных чисел, так как на этом множестве значения выражения 7-9 найти нельзя.

Рассмотрим запись $2a + 3$. Она образована из чисел, знаков действий и буквы a. Если вместо a подставлять числа, то будут получаться различные числовые выражения:

если $a = 7$, то $2\times7 + 3$;

если $a = 0$, то $2\times0 + 3$;

если $a = -4$, то $2\times(-4) + 3$.

В записи 2а + 3 такая буква а называется ***переменной***, а сама запись 2а + 3 - ***выражением с переменной.***

Переменную в математике, как правило, обозначают любой строчной буквой латинского алфавита. В начальной школе для обозначения переменной кроме букв используются другие знаки, например œ. Тогда запись выражения с переменной имеет вид: 2×œ + 3.

Каждому выражению с переменной соответствует множество чисел, при подстановке которых получается числовое выражение, имеющее смысл. Это множество называют ***областью определения выражения****.*

Например, область определения выражения 5 : (х - 7) состоит из всех действительных чисел, кроме числа 7, так как при х = 7 выражение 5 : (7 - 7) смысла не имеет.

В математике рассматривают выражения, содержащие одну, две и больше переменных.

Например, 2а + 3 - это выражение с одной переменной, а (3х + 8у) ×2 - это выражение с тремя переменными. Чтобы из выражения с тремя переменными получить числовое выражение, надо вместо каждой переменной подставить числа, принадлежащие области определения выражения.

Итак, мы выяснили, как образуются из алфавита математического языка числовые выражения и выражения с переменными. Если провести аналогию с русским языком, то выражения - это слова математического языка.

Но, используя алфавит математического языка, можно образовать и такие, например, записи: (3 + 2)) - ×12 или 3х – у : +)8, которые нельзя назвать ни числовым выражением, ни выражением с переменной. Эти примеры свидетельствуют о том, что описание - из каких знаков алфавита математического языка образуются выражения числовые и с переменными, не является определением этих понятий. Дадим определение числового выражения (выражение с переменными определяется аналогично).

Определение. ***Если f и q - числовые выражения, то (f) + (q), (f) - (q), (f) × (q), (f) • (q)- числовые выражения. Считают, что каждое число является числовым выражением.***

Если точно следовать этому определению, то пришлось бы писать слишком много скобок, например, (7) + (5) или (6): (2). Для сокращения записи условились не писать скобки, если несколько выражений складываются или вычитаются, причем эти операции выполняются слева направо. Точно так же не пишут скобок и тогда, когда перемножаются или делятся несколько чисел, причем эти операции выполняются по порядку слева направо.

Например, пишут так: 37 – 12 + 62 - 17+13 или 120 :15-7:12.

Кроме того, условились сначала выполнять действия второй ступени (умножение и деление), а затем действия первой ступени (сложение и вычитание). Поэтому выражение (12-4:3) + (5-8:2-7) записывают так: 12 – 4 : 3 + 5 – 8 : 2 - 7.

Задача. Найти значение выражения 3х (х - 2) + 4(х - 2) при х = 6.

Решение

1 способ. Подставим число 6 вместо переменной в данное выражение: 3 × 6-(6 - 2) + 4×(6 - 2). Чтобы найти значение полученного числового выражения, выполним все указанные действия: 3×6× (6 - 2) + 4× (6-2)= 18× 4 + 4 × 4 = 72 + 16 = 88. Следовательно, при *x* = 6 значение выражения 3x (x- 2) + 4(x-2) равно 88.

2 способ. Прежде чем подставлять число 6 в данное выражение, упростим его: 3x (x - 2) + 4(x - 2) = *(x* - 2)(3x + 4). И затем, подставив в полученное выражение вместо *x* число 6, выполним действия: (6 - 2) × (3×6 + 4) = 4× (18 + 4) = 4×22 = 88.

Обратим внимание на следующее: и при первом способе решения задачи, и при втором мы одно выражение заменяли другим.

Например, выражение 18×4 + 4×4 заменяли выражением 72+16, а выражение 3x (x - 2) + 4(x - 2) - выражением *(x* - 2)(3x + 4), причем эти замены привели к одному и тому же результату. В математике, описывая решение данной задачи, говорят, что мы выполняли ***тождественные преобразования*** выражений.

Определение. ***Два выражения называются тождественно равными, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.***

Примером тождественно равных выражений могут служить выражения 5(x + 2) и *5x* + 10, поскольку при любых действительных значениях *x* их значения равны.

Если два тождественно равных на некотором множестве выражения соединить знаком равенства, то получим предложение, которое называют ***тождеством*** на этом множестве.

Например, 5(x + 2) = *5x* + 10 - тождество на множестве действительных чисел, потому что для всех действительных чисел значения выражения 5(x + 2) и 5x + 10 совпадают. Используя обозначение квантора общности, это тождество можно записать так: (" x Î R) 5(x + 2) = 5x + 10. Тождествами считают и верные числовые равенства.

Замена выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называется ***тождественным преобразованием данного выражения на этом множестве.***

Так, заменив выражение 5(x + 2) на тождественно равное ему выражение 5x + 10, мы выполнили тождественное преобразование первого выражения. Но как, имея два выражения, узнать, являются они тождественно равными или не являются? Находить соответствующие значения выражений, подставляя конкретные числа вместо переменных? Долго и не всегда возможно. Но тогда каковы те правила, которыми надо руководствоваться, выполняя тождественные преобразования выражений? Этих правил много, среди них - свойства алгебраических операций.

Задача. Разложить на множители выражение $ax - bx + ab - b^2$.

Решение. Сгруппируем члены данного выражения по два (первый со вторым, третий с четвертым): $ax - bx + ab - b^2 = (ax-bx)+(ab-b^2)$. Это преобразование возможно на основании свойства ассоциативности сложения действительных чисел.

Вынесем в полученном выражении из каждой скобки общий множитель: $(ax - bx) + (ab - b^2) = x(a - b) + b(a - b)$ - это преобразование возможно на основании свойства дистрибутивности умножения относительно вычитания действительных чисел.

В полученном выражении слагаемые имеют общий множитель, вынесем его за скобки: $x(a - b) + b(a - b) = (a - b)(x - b)$. Основой выполненного преобразования является свойство дистрибутивности умножения относительно сложения. Итак, $ax - bx + ab - b^2 = (a - b)(x - b)$.

В начальном курсе математики выполняют, как правило, только тождественные преобразования числовых выражений. Теоретической основой таких преобразований являются свойства сложения и умножения, различные правила: прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычитания числа из суммы и др.

Например, чтобы найти произведение 35 × 4, надо выполнить преобразования: 35 × 4 = (30 + 5) × 4 = 30 × 4 + 5 × 4 = 120 + 20 = 140. В основе выполненных преобразований лежат: свойство дистрибутивности умножения относительно сложения; принцип записи чисел в десятичной системе счисления (35 = 30 + 5); правила умножения и сложения натуральных чисел.