4 de abril

Ejercicios Intervalos de confianza

28. Se ha obtenido una muestra de diez valores de una variable con distribución normal de media μ desconocida y varianza $\sigma^2 = 3$. Los valores observados son:

2,1; 2,5; 1,6; 2,4; 2,8; 2,0; 1,9; 1,2; 2,9; 3,2.

Construye un intervalo de confianza para la media con nivel de confianza del:

a) 90 % **b)** 95 % **c)** 99 %

La variable aleatoria *X* tiene una distribución $N\left(\mu, \sigma = \sqrt{3}\right)$.

La muestra aleatoria tiene una media muestral de:

$$\bar{x} = \frac{2,1+2,5+1,6+2,4+2,8+2,0+1,9+1,2+2,9+3,2}{10} = 2,26$$

a) De $1-\alpha = 0,90$, resulta que $\frac{\alpha}{2} = 0,05$; y de las tablas de la N(0,1), se obtiene que:

$$P\left(Z < z_{0,05}\right) = 1-0,05 = 0,95 \Rightarrow z_{0,05} = 1,645$$

Por lo que el intervalo de confianza al 90% para la media μ es:

$$IC_{0,90}(\mu) = \left(2,26 - 1,645\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}};\ 2,26 + 1,645\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right) = (1,36\ ;\ 3,16)$$

b) De $1-\alpha = 0,95$, resulta que $\frac{\alpha}{2} = 0,025$; y de las tablas de la **N**(0,1), se obtiene que:

$$P\left(Z < z_{0,025}\right) = 1-0,025 = 0,975 \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$$

Por lo que el intervalo de confianza al 95% para la media μ es:

$$IC_{0,90}(\mu) = \left(2,26 - 1,96\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}};\ 2,26 + 1,96\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right) = (1,19;\ 3,33)$$

c) De $1-\alpha = 0,99$, resulta que $\frac{\alpha}{2} = 0,005$; y de las tablas de la N(0,1), se obtiene que:

$$P\left(Z < z_{0,005}\right) = 1-0,005 = 0,995 \Rightarrow z_{0,005} = 2,575$$

Por lo que el intervalo de confianza al 99% para la media μ es:

$$IC_{0,90}(\mu) = \left(2,26 - 2,575\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}};\ 2,26 + 2,575\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right) = (0,85;\ 3,67)$$

29. La cantidad de refresco que se sirve en cada vaso a la entrada de unos cines está normalmente distribuida con una desviación típica de 15 mL. Se han medido las cantidades en los vasos de los 25 asistentes de una determinada sesión que compraron un refresco y se ha obtenido un promedio de 200,8 mL. Fijado un nivel de confianza del 90 %, calcula el intervalo de confianza para la media de la cantidad de refresco que se sirve en cada vaso. Detalla los pasos realizados para obtener los resultados.

Se considera la variable aleatoria X: "cantidad de refresco que se sirve en cada vaso, en mL".

La distribución de la variable X es normal, de media desconocida: $X \sim N(\mu, \sigma = 15)$

Una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$, proporciona una media muestral $\overline{x} = 200{,}8$ mL. Si el nivel de confianza es del 90 % entonces:

$$1 - \alpha = 0{,}9 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05 \Rightarrow z_{0{,}05} = 1{,}645$$

De manera que el intervalo de confianza correspondiente para el contenido medio de refresco, μ, que se sirve en cada vaso es:

$$IC_{0{,}9}(\mu) = \left(200{,}8 - 1{,}645\frac{15}{\sqrt{25}}\,;\, 200{,}8 + 1{,}645\frac{15}{\sqrt{25}}\right) = (195{,}865\,;\,205{,}735)$$

30. La edad a la que obtienen el permiso de conducir los habitantes de una determinada población es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 4 años. Para estimar la media se elige aleatoriamente una muestra de 100 habitantes de dicha población.

a) ¿Cuál es la varianza de la distribución muestral?

b) Si la media muestral es 24 años, halla un intervalo de confianza al 90 % para la media poblacional.

La variable aleatoria X: "edad, en años, a la que obtienen el permiso de conducir" tiene una distribución normal:

$$X \sim N(\mu, \sigma = 4)$$

a) La media muestral tiene, también, una distribución normal $\overline{X} \sim N\left(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}}\right)$ cuya varianza vale:

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{16}{100} = 0{,}16$$

b) Como el nivel de confianza es del 90 %: $1 - \alpha = 0{,}9 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05 \Rightarrow z_{0{,}05} = 1{,}645$

Por lo que, un intervalo de confianza al 90 %, para la media de edad poblacional a la que se obtiene el permiso de conducir, es:

$$IC_{0{,}9}(\mu) = \left(24 - 1{,}645\sqrt{0{,}16};\, 24 + 1{,}645\sqrt{0{,}16}\right) = (23{,}34;\, 24{,}66)$$