.. 12.SINIF MATEMATİK DERS PLANI

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	**Tarih**	**27-31/10/2025**
Sınıf	12	**Süre**	**4 ders saati**
Alt Öğrenme Alanı	**DİZİLER**		
Konu	Aritmetik, Geometrik Diziler ve Özellikleri		

BÖLÜM II

Kazanım	12.2.1.3. Aritmetik ve geometrik dizilerin özelliklerini kullanarak işlemler yapar.
Kazanım Açıklaması	---
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

ARİTMETİK, GEOMETRİK DİZİLER VE ÖZELLİKLERİ

Toplam Sembolü $\left(\sum\right)$

$f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(k)=a_k$, $r\leq n$ ve $r, n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\sum_{k=r}^{n} a_k = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_n \text{ olur.}$$

Bu ifadede k ye **indis** ya da **değişken**, r ye **alt sınır**, n ye ise **üst sınır** denir.

Aşağıda toplam sembolü ile verilen eşitlikleri inceleyiniz.

- $\sum_{k=1}^{6} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$
- $\sum_{k=1}^{12} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2$
- $\sum_{k=1}^{7} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$
- $\sum_{k=2}^{9} (3k+1) = 7 + 10 + 13 + \dots + 28$
- $\sum_{k=5}^{8} 2k = 10 + 12 + 14 + 16$
- $\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$
- $2 + 4 + 6 + \dots + 26 = \sum_{k=1}^{13} 2k$
- $20 + 21 + 22 + \dots + 32 = \sum_{k=20}^{32} k$
- $5 + 7 + 9 + \dots + 19 = \sum_{k=1}^{8} (2k+3)$
- $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{30} = \sum_{k=6}^{30} a_k$

Aritmetik Diziler ve Özellikleri

Ardışık terimleri arasındaki farkın sabit olduğu dizilere **aritmetik dizi** denir.

(a_n) aritmetik dizisinde

$$\mathbf{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{n+1} - a_n = d}$$

olacak şekilde bir d gerçek sayısı vardır. Bu d sayısına **aritmetik dizinin ortak farkı** denir.

İlk terimi a_1 ve ortak farkı d olan bir (a_n) aritmetik dizisinin genel terimi

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d} \text{ olur.}$$

(a_n) aritmetik dizisinin ardışık terimleri arasındaki fark sabit ve d olduğundan

$$\left.\begin{array}{r} \cancel{a_2} - a_1 = d \\ \cancel{a_3} - \cancel{a_2} = d \\ \cancel{a_4} - \cancel{a_3} = d \\ \vdots \\ + \quad a_n - \cancel{a_{n-1}} = d \end{array}\right\} \text{(Elde edilen } n-1 \text{ tane eşitlik taraf tarafa toplanır.)}$$

$$a_n - a_1 = \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1 \text{ tane}} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

ÖRNEK

İlk terimi $a_1 = 7$ ve ortak farkı $d = 4$ olan bir aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \qquad (a_1 = 7 \text{ ve } d = 4) \\ &= 7 + (n-1) \cdot 4 \\ &= 7 + 4n - 4 \\ &= 4n + 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖZELLİK 1

Bir aritmetik dizide $p \in \mathbb{Z}^+$ ve $p < n$ olmak üzere

$$\mathbf{a_n = a_p + (n-p) \cdot d} \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{array}{r} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ - \quad a_p = a_1 + (p-1) \cdot d \end{array}\right\} \text{(Eşitlikler taraf tarafa çıkarılır.)}$$

$$a_n - a_p = \cancel{a_1} - \cancel{a_1} + (n-1) \cdot d - (p-1) \cdot d$$

$$a_n - a_p = n \cdot d - \cancel{d} - p \cdot d + \cancel{d}$$

$$a_n - a_p = (n-p) \cdot d$$

$$a_n = a_p + (n-p) \cdot d$$

ÖRNEK

(a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere $\dfrac{a_5 - a_2 + a_{10}}{a_{13}}$ ifadesinin en sade biçimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_5 = a_1 + 4d$

$a_2 = a_1 + d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{13} = a_1 + 12d$

$$\frac{a_5 - a_2 + a_{10}}{a_{13}} = \frac{a_1 + 4d - (a_1 + d) + a_1 + 9d}{a_1 + 12d}$$

$$= \frac{\cancel{a_1} + 4d - \cancel{a_1} - d + a_1 + 9d}{a_1 + 12d}$$

$$= \frac{a_1 + 12d}{a_1 + 12d} = 1 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 2

Bir aritmetik dizinin n. terimi a_n, p. terimi a_p olmak üzere bu dizinin ortak farkı

$$\mathbf{d = \frac{a_n - a_p}{n - p}} \text{ olur.}$$

$$a_n = a_p + (n-p)\cdot d \Rightarrow a_n - a_p = (n-p)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_p}{n-p}$$

ÖRNEK

Üçüncü terimi 17 ve onuncu terimi 73 olan bir aritmetik dizinin ortak farkını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$d = \frac{a_n - a_p}{n - p} \Rightarrow d = \frac{a_{10} - a_3}{10 - 3} \qquad (n = 10 \text{ ve } p = 3)$$

$$\Rightarrow d = \frac{73 - 17}{10 - 3} \qquad (a_{10} = 73 \text{ ve } a_3 = 17)$$

$$\Rightarrow d = 8 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 3

Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamı birbirine eşittir. $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$ dizisinde

$$\mathbf{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_k + a_{n-k+1}} \text{ olur.}$$

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d = 2a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2) \cdot d = 2a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$\vdots$$
$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1) \cdot d + a_1 + (n-k+1-1) \cdot d = 2a_1 + (n-1) \cdot d$$

ÖRNEK

11 terimli bir aritmetik dizinin 2. terimi 5 ve 10. terimi 37 dir. Bu aritmetik dizinin 5. ve 7. terimlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11})$ sonlu aritmetik dizisinde
$a_1 + a_{11} = a_2 + a_{10} = a_3 + a_9 = a_4 + a_8 = a_5 + a_7$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} a_5 + a_7 &= a_2 + a_{10} \\ &= 5 + 37 \\ &= 42 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

SONUÇ

Bir aritmetik dizide $k, p, s, t \in \mathbb{Z}^+$ için $k + p = s + t$ ise $a_k + a_p = a_s + a_t$ olur.

ÖRNEK

Sonlu bir aritmetik dizide $a_8 = 10$, $a_3 + a_{21} = 40$ olduğuna göre a_{16} değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} a_3 + a_{21} &= a_8 + a_{16} \\ 40 &= 10 + a_{16} \\ a_{16} &= 30 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖZELLİK 4

Bir aritmetik dizide her terim kendisinden eşit uzaklıktaki terimlerin aritmetik ortalamasına eşittir. $k < p$ için

$$\mathbf{a_p = \frac{a_{p+k} + a_{p-k}}{2}} \text{ olur.}$$

$$a_{p+k} + a_{p-k} = a_1 + (p + k - 1) \cdot d + a_1 + (p - k - 1) \cdot d$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2a_1 + (p + \cancel{k} - 1 + p - \cancel{k} - 1) \cdot d$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2a_1 + 2(p - 1) \cdot d$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2\underbrace{(a_1 + (p - 1) \cdot d)}_{a_p}$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2a_p$$
$$a_p = \frac{a_{p+k} + a_{p-k}}{2}$$

ÖRNEK

İlk üç terimi sırasıyla $3x - 4$, $x + 5$ ve $4x - 1$ olan aritmetik dizinin ortak farkını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_1 = 3x - 4$, $a_2 = x + 5$ ve $a_3 = 4x - 1$ olur.

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow x + 5 = \frac{3x - 4 + 4x - 1}{2}$$
$$\Rightarrow 7x - 5 = 2x + 10$$
$$\Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

Bu durumda ilk üç terim 5, 8, 11 olduğundan ortak fark 3 bulunur.

Bir Aritmetik Dizinin İlk n Teriminin Toplamı

Ortak farkı d olan bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı S_n ile gösterilirse

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1) \cdot d)}$$
$$\mathbf{= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)} \text{ olur.}$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\
&= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d) \\
&= \underbrace{(a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1)}_{n \text{ tane}} + \underbrace{(d + 2d + \ldots + (n-1)d)}_{(1+2+\ldots+n-1)\cdot d} \\
&= n \cdot a_1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2} \cdot d \\
&= \frac{2n \cdot a_1 + (n-1)\cdot n \cdot d}{2} \\
&= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + \overbrace{a_1 + (n-1)\cdot d}^{a_n}) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)
\end{aligned}
$$

ÖRNEK

2. terimi 7, 11. terimi 43 olan bir aritmetik dizinin ilk 20 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{a_k - a_p}{k - p} \\
&= \frac{a_{11} - a_2}{11 - 2} \\
&= \frac{43 - 7}{9} = 4 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
7 &= a_1 + 4 \\
a_1 &= 3 \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d) \\
S_{20} &= \frac{20}{2}(2\cdot 3 + (20-1)\cdot 4) \\
&= 10 \cdot 82 \\
&= 820 \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

ÖRNEK

İlk n teriminin toplamı $S_n = n^2 - 3n$ olan (a_n) aritmetik dizisinde aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

a) a_{11}

b) $a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

ÇÖZÜM

a)
$$\begin{aligned} a_{11} &= S_{11} - S_{10} \\ &= (11^2 - 3\cdot 11) - (10^2 - 3\cdot 10) \\ &= 88 - 70 \\ &= 18 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= S_6 - S_2 \\ &= (6^2 - 3\cdot 6) - (2^2 - 3\cdot 2) \\ &= 18 - (-2) \\ &= 20 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

İlk n teriminin toplamı $S_n = \dfrac{n^2 + 3n}{2}$ olan bir aritmetik dizinin ortak farkını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_1 = S_1 = \dfrac{1^2 + 3\cdot 1}{2} = 2$

$a_2 = S_2 - S_1 = \dfrac{2^2 + 3\cdot 2}{2} - \dfrac{1^2 + 3\cdot 1}{2} = 3$ olur.

$d = a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1$ bulunur.

Geometrik Diziler ve Özellikleri

Ardışık terimleri arasındaki oranı sabit olan dizilere **geometrik dizi** denir.

Bir (a_n) geometrik dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ $(a_n \neq 0)$ ise r gerçek sayısına (a_n) geometrik dizisinin **ortak çarpanı** denir. İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin genel terimi

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}} \quad \text{olur.}$$

(a_n) geometrik dizisinin ardışık terimleri arasındaki oran sabit ve r olduğundan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot r$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{a_2} &= a_1 \cdot r \\ \cancel{a_3} &= \cancel{a_2} \cdot r \\ \cancel{a_4} &= \cancel{a_3} \cdot r \\ &\vdots \\ \times \quad a_n &= \cancel{a_{n-1}} \cdot r \end{aligned}\right\} \text{(Elde edilen } n-1 \text{ tane eşitlik taraf tarafa çarpılır.)}$$

$$a_n = a_1 \cdot \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n-1 \text{ tane}}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki dizilerden geometrik dizi olanı bulunuz.

a) $(a_n) = (3n + 5)$ b) $(c_n) = (2^{n+2})$

ÇÖZÜM

a) $r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(n+1)+5}{3n+5} = \frac{3n+8}{3n+5}$ ifadesinin değeri n nin alacağı değerlere göre değişir.

$\frac{3n+8}{3n+5}$ ifadesi sabit sayı olmadığından bir geometrik dizinin ortak çarpanı olamaz. O hâlde (a_n) bir geometrik dizi değildir.

b) $r = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1+2}}{2^{n+2}} = 2$ olduğundan (c_n) ortak çarpanı $r = 2$ olan bir geometrik dizidir.

ÖRNEK

Bir geometrik dizide 2. terim 36, ortak çarpan $\frac{2}{3}$ ise dizinin 7. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} \Rightarrow a_7 = a_2 \cdot r^{7-2}$$
$$= 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$
$$= 36 \cdot \frac{32}{243} = \frac{128}{27} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$(a_n) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, a, b, c, d, e, 243\right)$ sonlu geometrik dizisi veriliyor. Buna göre $b \cdot c$ çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a_1 \cdot a_8 = a_2 \cdot a_7 = a_3 \cdot a_6 = a_4 \cdot a_5 \Rightarrow \frac{1}{9} \cdot 243 = \frac{1}{3} \cdot e = a \cdot d = b \cdot c \text{ olur.}$$
$$\Rightarrow b \cdot c = \frac{243}{9} = 27 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir (a_n) geometrik dizisinde $a_7 = 1458$ ve $a_3 = 18$ olduğuna göre bu dizinin ortak çarpanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$r = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}} \Rightarrow r = \sqrt[7-3]{\frac{1458}{18}} \qquad (k = 7,\ p = 3,\ a_7 = 1458,\ a_3 = 18)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[4]{81}$$

$$\Rightarrow r = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

İlk terimi 1 ve ortak çarpanı $r = 2$ olan bir geometrik dizinin ilk 9 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow S_9 = 1 \cdot \frac{1 - 2^9}{1 - 2} \qquad (a_1 = 1 \text{ ve } r = 2)$$

$$= \frac{-511}{-1} = 511 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir geometrik dizinin ilk 8 teriminin toplamının, ilk 4 teriminin toplamına oranı $\frac{97}{16}$ olduğuna göre r nin pozitif değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{97}{16} \Rightarrow \frac{\cancel{a_1} \cdot \frac{1 - r^8}{\cancel{1 - r}}}{\cancel{a_1} \cdot \frac{1 - r^4}{\cancel{1 - r}}} = \frac{97}{16} \Rightarrow \frac{1 - r^8}{1 - r^4} = \frac{97}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(1 - r^4)} \cdot (1 + r^4)}{\cancel{1 - r^4}} = \frac{97}{16}$$

$$\Rightarrow r^4 = \frac{97}{16} - 1$$

$$\Rightarrow r^4 = \frac{81}{16}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

1. $5 + 8 + 11 + 14 + ... + 122$ toplamının Σ sembolü ile gösterimini bulunuz.

2. 18. terimi, 11. teriminden 105 fazla olan bir aritmetik dizide 20. terim ile 15. terim arasındaki farkı bulunuz.

3. Aşağıda verilen dizilerden geometrik dizi olanlarını bulunuz.

   a) $(a_n) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, ..., 1, ...)$

   b) $(b_n) = (2, 4, 6, ..., 2n, ...)$

   c) $(c_n) = \left(1, 3, 9, 27, ..., 3^{n-1}, ...\right)$

   ç) $(d_n) = \left(1, 8, 27, 64, ..., n^3, ...\right)$

   d) $(k_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, ..., \frac{1}{3n}, ...\right)$

4. İlk terimi 5 olan bir aritmetik dizinin ilk 30 teriminin toplamı 1020 olduğuna göre bu dizinin 5. terimini bulunuz.

5. İlk terimi $a_1 = -4$, ortak farkı $d = 5$ ve son terimi 91 olan sonlu aritmetik dizinin terim sayısını bulunuz.

6. Pozitif terimli bir (a_n) geometrik dizisi için
$$\frac{a_4 \cdot a_6 \cdot a_8 \cdot a_{10}}{a_7 \cdot a_5} = 121$$
olduğuna göre a_8 terimini bulunuz.

7. 256 ile $\frac{1}{128}$ sayıları arasına $n + 2$ tane terim yerleştirilerek bir geometrik dizi elde ediliyor. Elde edilen bu geometrik dizinin ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi	---

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar	Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.

....
....
Matematik Öğretmeni

.../..../2025
UYGUNDUR
Okul Müdürü
....