

Epreuve Commune aux ENS de Lyon et Cachan 2006

PHYSIQUE PC2 Durée 5H

Nous considérons à plusieurs reprises dans le problème un signal lumineux quasi-monochromatique dont l'amplitude et la phase sont modulées avec des temps caractéristiques longs devant la période du signal. Un tel signal peut ainsi être décrit par l'expression mathématique :

$$s(t) = s_0(t) \cos [\omega_0 t + (p(t))]$$

soit, en notation complexe où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$:

$$\underline{s}(t) = \underline{s}_0(t) \exp(i \omega_0 t) .$$

Pour un tel signal :

L'intensité lumineuse instantanée est la quantité $I(t) = K \underline{s} \underline{s}^*$, où K est une constante et où $\underline{s}^*$ représente le complexe conjugué de $\underline{s}$.

- Un photodétecteur, qui sera en pratique une photodiode de temps de réponse τ_R délivre un signal électrique $u(t)$ proportionnel à la moyenne de $I(t)$ déterminée sur une durée τ_R , soit

$$u(t) = K' \langle I(t) \rangle_{\tau_R} \text{ où } K' \text{ est une constante.}$$

On rappelle les constantes fondamentales : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ la célérité de la lumière dans le vide, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide, $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ la masse de l'électron, $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ la charge élémentaire, $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ la constante de Planck,

$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits et $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ le nombre d'Avogadro.

On donne également la masse molaire du mercure égale à 200 kg.mol^{-1} .

Première partie

I Largeur spectrale d'une raie lumineuse

On propose de représenter par un modèle classique l'émission d'un signal lumineux par un atome préalablement excité. On adopte le modèle de l'électron élastiquement lié. Un nuage électronique supposé indéformable, de charge totale $-e$, de masse m et de barycentre N peut effectuer de petites oscillations. A l'équilibre, le centre N du nuage électronique est situé au point O , barycentre des autres charges de l'atome. Le moment dipolaire de l'atome est donc nul à l'équilibre. Le nuage électronique est soumis à une

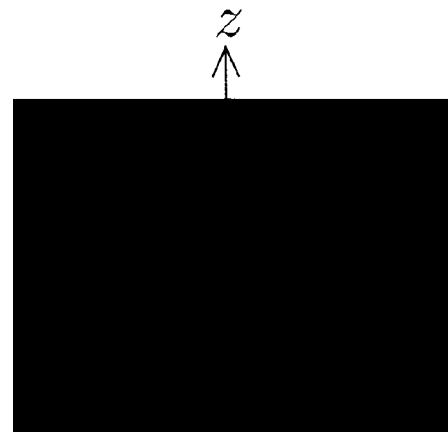
force de rappel élastique, de constante de raideur notée $k = m \omega_0^2$

ω_0

Figure 1: Représentation classique de l'atome par le modèle de l'électron élastiquement lié.

(I.1) Pour cette question, on néglige tout effet dissipatif et l'atome est supposé isolé.

(I.1.a) Quelle approximation fait-on en supposant qu'il existe un référentiel galiléen où le point O est immobile ? Nous ferons dorénavant cette approximation.



(I.1. b) Le système effectue des oscillations libres de la forme

$$\vec{ON} = A \cos(\omega_0 t) \vec{e}_z \quad (1)$$

Déterminer l'énergie (totale) $\mathcal{E}$ de l'oscillateur harmonique constitué par l'atome. On l'exprimera en fonction des paramètres A , m et ω_0

(I.2) La puissance instantanée rayonnée par le dipôle est donnée par la formule de LARMOR :

$$\Phi = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\ddot{\vec{p}} \right)^2$$

où $\ddot{\vec{p}}$ représente la dérivée seconde par rapport au temps du moment dipolaire électrique de l'atome. En tenant compte de l'énergie perdue par rayonnement, les oscillations libres du système sont maintenant décrites sous la forme :

$$\vec{ON} = A(t) \cos(\omega_0 t) \vec{e}_z \quad (3)$$

La fonction $A(t)$ ayant une durée caractéristique d'évolution très grande devant $2\pi / \omega_0$ nous considérons qu'à un instant donné t , l'expression de l'énergie établie à la question précédente reste toujours valable.

(I.2.a) Exprimer en fonction de $A(t)$ et des autres données, la puissance moyenne $\langle \Phi(t) \rangle$ rayonnée par le dipôle pendant une période.

(I.2.b) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'énergie $\mathcal{E}(t)$.

En déduire l'expression de $\mathcal{E}(t)$. Quelle est l'expression de la durée caractéristique τ_0 d'un train d'ondes émis par l'atome ?

(I.2.c) L'énergie totale émise lors de la désexcitation de l'atome peut être associée à l'énergie d'un photon $E_{\text{émise}} = h\nu$. En déduire une expression approchée de l'amplitude maximale du champ électrique de l'onde rayonnée par un atome unique à une distance r . On pourra supposer que la puissance est émise de façon isotrope.

(I.2.d) Applications numériques.

– L'étalon officiel de fréquence est déterminé par une transition entre deux niveaux de l'atome de césium ^{133}Cs . Sa valeur est fixée à 9 192 631 770 Hz. Dans quel domaine de longueurs d'onde se situe cet étalon de fréquence ? Avec notre modèle, quelle serait la valeur de la durée caractéristique τ_0 des trains d'onde ?

– Pour un atome émettant dans le visible, donner l'ordre de grandeur de τ_0 et de l'amplitude maximale du champ électrique à une distance de l'atome émetteur égale à 1 mètre.

(I.3) Un train d'ondes quasi-monochromatique, donné pour $t > 0$ par l'expression :

$$s(t) = s_0 \exp(-t/\tau) \cos(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 \tau \gg 1 \quad (4)$$

et illustré par la figure 2, peut se représenter par une superposition d'ondes parfaitement monochromatiques, chacune de durée infinie.

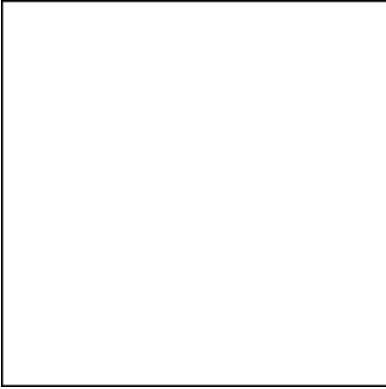


Figure 2: Représentations temporelle (a) et fréquentielle (b) d'un train d'ondes quasi-monochromatique.

On montre que le signal $s(t)$ peut s'écrire :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (5)$$

où la fonction $\tilde{F}(\omega)$ prend des valeurs non nulles aussi bien pour les pulsations ω positives que négatives.

(I.3.a) Sachant que pour τ réel strictement positif :

$$\exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right) = \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{1 + \tau^2 \omega^2} d\omega \quad (6)$$

montrer que $\tilde{F}(\omega)$ est de la forme :

$$\tilde{F}(\omega) = B \left[\frac{1}{1 + C(\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{1 + C(\omega + \omega_0)^2} \right] \quad (7)$$

Déterminer les deux constantes B et C .

En se rappelant que $\omega_0 \tau \gg 1$ représenter $\tilde{F}(\omega)$ sur tout l'axe des réels.

(1.3.b) Montrer que l'on peut réécrire le signal $s(t)$:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (8)$$

$F(\omega)$ est de la forme : $F(\omega) = D/[1 + C(\omega - \omega_0)^2]$ (9)

Déterminer la constante D .

Pourquoi peut-on considérer que le spectre de fréquences $F(\omega)$ ne prend des valeurs significatives que dans le domaine des pulsations positives ?

Déterminer la largeur totale à mi-hauteur $\Delta \omega_{1/2}$ de ce spectre.

À partir de ce résultat, estimer la largeur en fréquence $\Delta \nu$ de la raie d'émission.

(I.3.c) En utilisant le modèle de la question précédente, estimer :

- la largeur spectrale en fréquence $\Delta \nu$ pour la raie étalon de l'atome de césium ;
- la largeur spectrale $\Delta \nu$ pour une raie d'émission d'atome dans le visible ;

– la longueur de cohérence L_{coh} associée à cette raie dans le visible. Ce résultat vous paraît-il en accord avec les mesures effectuées en travaux pratiques avec un interféromètre de Michelson ?

Les raies d'émission ont en général une largeur spectrale très supérieure à la largeur intrinsèque étudiée jusqu'ici. Dans les questions (I.4) et (I.5), nous nous proposons de décrire et modéliser quelques causes d'élargissement en fréquence des raies.

(I.4) Nous avons supposé que l'atome émetteur était immobile. Or, l'agitation thermique provoque une dispersion des fréquences par effet Doppler.

(I.4.a) Le détecteur, supposé immobile dans le référentiel d'étude, est situé au point D (figure 3). Le centre O de l'atome émetteur se déplace avec

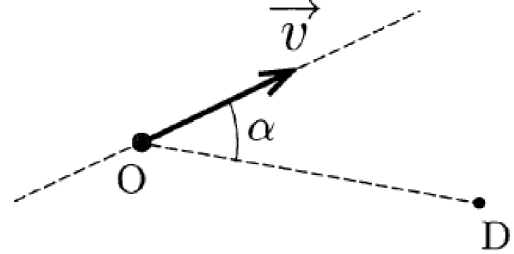


Figure 3: Géométrie relative à la modélisation de l'effet Doppler.

une vitesse $\vec{v}$ supposée constante. Sa norme v étant très faible devant c , nous pouvons utiliser sans dommage les relations de la cinématique non relativiste. En ne tenant pas compte de l'atténuation du signal avec la distance, un signal monochromatique émis en O et reçu en D a pour expression :

$$s(D, t) = s_0 \cos [\omega_0 (t - OD/c)] \quad \text{soit } s(D, t) = s_0 \cos [\phi(t)] . \quad (10)$$

- Déterminer la pulsation instantanée ω du signal perçu par le détecteur à partir de la dépendance temporelle de la fonction $\phi(t)$
- Exprimer en fonction du paramètre v et de l'angle α défini sur la figure 3 la dérivée dOD/dt . En déduire l'expression de la pulsation instantanée ω en fonction des paramètres ω_0 , v , c et α .

(I.4.b) Une vapeur métallique est enfermée dans une cellule de verre (figure 4).

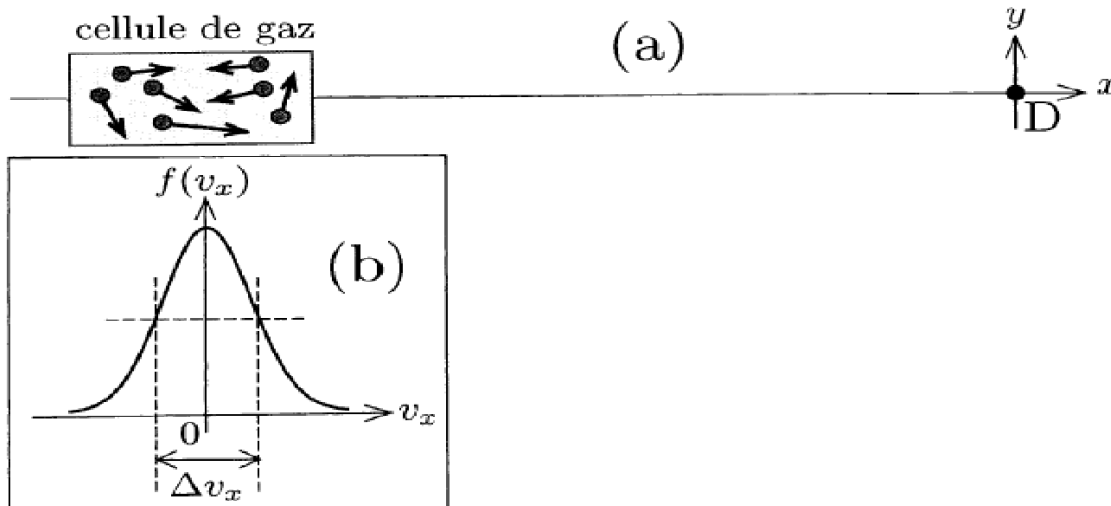


Figure 4: Modélisation de la radiation émise par une assemblée d'atomes ayant une agitation thermique.

Chacun des atomes contenus dans la vapeur est excité et émet une radiation quasi-monochromatique vers un détecteur disposé comme indiqué sur la figure 4(a). Les atomes ont une vitesse d'agitation thermique aléatoire :

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

La loi de distribution de la composante selon l'axe x des vitesses est une loi "en cloche" comme celle qui est représentée sur la figure 4(b), avec une largeur caractéristique Δv_x . La probabilité élémentaire que la composante selon l'axe x de la vitesse d'un atome soit comprise entre les valeurs v_x et $v_x + dv_x$ est $dP = f(v_x)dv_x$.

- Estimer la largeur spectrale $\Delta \nu$ de la radiation perçue par le détecteur en fonction

de ν_0 (fréquence dans le référentiel où l'atome est au repos), c et Δv_x .

(I.4.c) On considère un gaz parfait monoatomique à l'équilibre thermique à la température T.

- Quelle est la valeur de la vitesse quadratique moyenne u ? En déduire celle de

$$u_x = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$$

- En déduire un ordre de grandeur de l'élargissement par effet Doppler $\Delta \nu_{\text{Dop}}$ pour une raie visible émise par une lampe à vapeur de mercure portée à une température de 1000 K. Estimer la longueur de cohérence L_{coh} correspondante et commenter.

- Déterminer $\Delta \nu_{\text{Dop}}$ pour l'étalon de fréquence à la température de 300 K. À quelle température faudrait-il porter l'échantillon pour obtenir une largeur $\Delta \nu_{\text{Dop}}$ de l'ordre de 100 Hz ? Commenter (on observera la précision avec laquelle l'étalon de fréquence est défini).

(I.5) Nous avons jusqu'à présent ignoré les interactions entre les atomes du milieu émetteur. Lorsque celui-ci est un gaz, on peut modéliser ces interactions en considérant qu'elles respectent les règles suivantes :

- L'interaction est nulle si la distance d entre les centres des deux atomes est supérieure à une distance caractéristique d_0 ;
- Il y a collision si cette distance d devient égale à d_0 . Dans ce cas, le rayonnement émis par chacun des atomes est perturbé et acquiert un déphasage aléatoire par rapport au rayonnement émis avant la collision.

On définit la *section efficace de collision* par $\sigma = \pi d_0^2$ et on note λ le *libre parcours moyen* défini comme la distance moyenne parcourue par un atome entre deux collisions.

(I.5.a) Justifier brièvement le nom donné à σ .

(I.5.b) Le libre parcours moyen est de la forme $\lambda \approx n^{-\alpha} \sigma^{-\beta}$ où n est la densité particulaire définie comme le nombre d'atomes par unité de volume. Déterminer au moyen d'arguments simples le signe et la valeur des paramètres α et β .

(I.5.c) Pour une vapeur monoatomique, estimer la durée moyenne τ_{coll} entre deux collisions successives. Pour obtenir cette estimation, on assimilera la vitesse des atomes à leur vitesse quadratique moyenne u. On exprimera le résultat en fonction de la section efficace de collision σ , de la

masse atomique M , de la pression P de la vapeur, de sa température T , ainsi que des constantes fondamentales R et N_A .

Estimer l'élargissement spectral $\Delta \nu_{\text{coll}}$ correspondant.

(I.5.d) Application numérique.

Estimer selon ce modèle $\Delta \nu_{\text{coll}}$ et la longueur de cohérence L_{coh} pour une lampe à vapeur de mercure haute pression en fonctionnement (pression $P = 3$ bar, température $T = 1000$ K). Commenter le résultat. Pour déterminer σ on prendra $\sigma_0 \approx 5 \times 10^{-10}$ m.

Deuxième partie

II Source lumineuse cohérente : laser

Les atomes d'une source classique, comme par exemple une lampe à vapeur de mercure, émettent de façon désordonnée. La phase de l'onde obtenue ne reste approximativement constante que pendant une durée de l'ordre du temps de cohérence. Pour obtenir une onde presque monochromatique (du moins pour augmenter très fortement le temps de cohérence), il faut contraindre les atomes à émettre en phase. C'est ce qui est réalisé dans un laser.

Un laser est constitué schématiquement d'un milieu amplificateur de lumière inséré dans une cavité (figure 5). Nous considérons ici une cavité unidimensionnelle composée de deux miroirs plans et parallèles notés M_1 et M_2 . Pour simplifier, nous considérons que le milieu amplificateur occupe tout l'espace compris entre eux. Le milieu est rendu amplificateur par un procédé non étudié ici, appelé "pompage". Une source extérieure d'énergie place une majorité d'atomes du milieu dans un état excité. Ce "pompage" peut être réalisé soit optiquement soit électriquement.

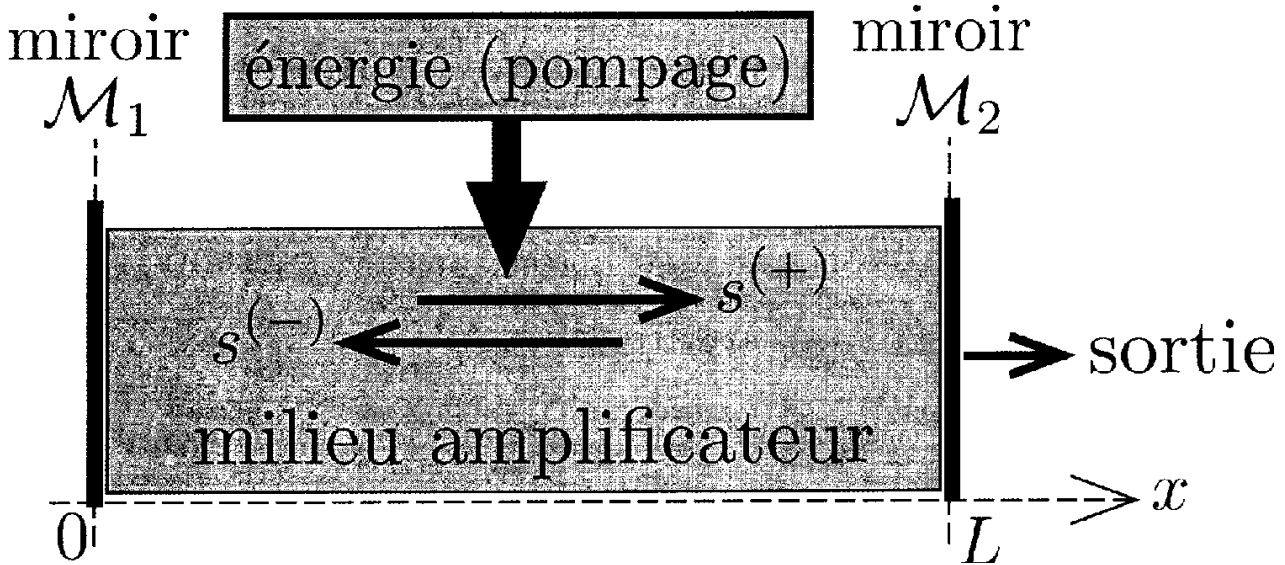


Figure 5: Représentation schématique d'une cavité laser composée d'un milieu amplificateur de lumière compris entre deux miroirs.

En régime permanent, la lumière à l'intérieur de la cavité de longueur L est décrite par deux ondes planes progressant en sens inverses. Pour une pulsation ω , ces deux ondes s'écrivent en notation complexe :

$$\underline{s}(x, t) = \underline{s}^{(+)}(x, t) + \underline{s}^{(-)}(x, t) \quad (11)$$

$$\begin{cases} \underline{s}^{(+)}(x, t) = \underline{a}^{(+)} \exp [\alpha(\omega)x - ik(\omega)x] \exp (i\omega t) \\ \underline{s}^{(-)}(x, t) = \underline{a}^{(-)} \exp [-\alpha(\omega)x + ik(\omega)x] \exp (i\omega t) \end{cases} \quad (12)$$

On suppose le milieu non dispersif, de sorte que : $k(\omega) = n \omega / c = 2\pi n / \lambda$ (13)

avec λ la longueur d'onde de la lumière dans le vide et n l'indice de réfraction du milieu amplificateur.

La grandeur $\alpha(\omega)$ est réelle.

Les coefficients de réflexion (en amplitude) sont égaux à 1 pour le miroir M_1 et $1 - \varepsilon$ pour le miroir M_2 . On ne tient pas compte des éventuels déphasages lors des réflexions sur les miroirs M_1 et M_2 , ainsi que lors de la transmission par le miroir M_2 permettant à la lumière de sortir de la cavité du laser.

(II.1) Conditions pour le fonctionnement du laser.

(II.1.a) À quelle condition portant sur $\alpha(\omega)$ le milieu est-il amplificateur de lumière ?

(II.1.b) À quelles conditions un régime permanent est-il possible ? On déterminera deux conditions notées respectivement (C_1) , portant sur les paramètres n , L et λ , et (C_2) , portant sur les paramètres ε , $\alpha(\omega)$ et L .

(II.1.c) Ces conditions sont-elles a priori réalisables simultanément ?

L'apparition spontanée d'oscillations de pulsation ω implique que la condition (C_2) soit remplacée par

une inégalité (C'_2) qui, dans le cas où $\varepsilon \ll 1$ s'écrit : $2\alpha(\omega)L \geq \varepsilon$

La condition (C_1) doit quant à elle être toujours vérifiée.

Quel phénomène non pris en compte dans la discussion précédente permet d'expliquer l'existence d'un régime permanent ? On raisonnera qualitativement et une analogie avec d'autres dispositifs connus sera la bienvenue.

(II.1.d) Le facteur $\alpha(\omega)$ varie autour d'une fréquence ω_0 sous la forme d'une courbe "en cloche" donnée par :

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \exp \left[- \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right)^2 \right] \quad \text{avec} \quad \alpha_0 L = 2 \times 10^{-2}. \quad (14)$$

Les paramètres ω_0 et $\Delta\omega$ correspondent respectivement à la pulsation centrale et à la largeur spectrale caractéristique d'une raie du milieu amplificateur de lumière.

– Déterminer le nombre de modes du laser, c'est-à-dire le nombre de valeurs de ω qui satisfont simultanément aux conditions (C_1) et (C'_2) . On se contentera d'un résultat à ± 1 près.

– Application numérique : calculer le nombre de modes pour $nL = 1,5$ m, $\Delta\nu = \Delta\omega / 2\pi = 500$ Mhz, $\varepsilon = 0,01$ et $\nu_0 = 5 \times 10^{14}$ Hz.

(II.2) Par construction du laser, la condition (C'_2) est supposée vérifiée entre les fréquences limites

$\nu_1 = \nu_0 - 40$ MHz et $\nu_2 = \nu_0 + 40$ MHz, où ν_0 est située dans le domaine optique. On suppose que la longueur effective nL de la cavité du laser est très voisine de 1,5 m.

(II.2.a) Déterminer l'écart fréquentiel $\delta\nu$ entre deux modes consécutifs et vérifier que le laser a un fonctionnement *monomode*.

(II.2.b) On veut accorder le laser sur la fréquence d'une raie d'absorption ν connue à ± 5 MHz près et comprise dans la zone de fonctionnement du laser.

- Montrer qu'il est possible de faire fonctionner le laser à la fréquence ν en modifiant légèrement la longueur effective L de la cavité puis déterminer l'amplitude maximale $\delta(nL)$ de la variation de nL nécessaire pour réaliser cet accord.
- Quel type d'actionneur permet usuellement de réaliser des déplacements de cet ordre ?

(II.2.c) On veut que les fluctuations de la fréquence émise par le laser restent inférieures à 5 MHz.

- Dans ce cas, quelle est la valeur maximale admissible pour la fluctuation de la longueur effective nL ?
- Comment peut-on stabiliser la fréquence du faisceau laser à une valeur proche de ν ?

(II.3) On dispose maintenant d'un laser *bimode*. La longueur effective nL de la cavité du laser est toujours égale à 1,5 m et les deux modes sont supposés parfaitement monochromatiques, de fréquences très voisines de $\nu_0 = 5 \times 10^{14}$ Hz, et de même intensité I_0 à la sortie du laser.

Le faisceau sortant est analysé par un photodétecteur rapide, dont le temps de réponse est de l'ordre de 1 ns.

- Déterminer l'expression $u(t)$ du signal électrique délivré par ce photodétecteur.
- Reprendre ce calcul pour un photodétecteur dont le temps de réponse est de l'ordre de la microseconde.

(II.4) Le faisceau issu du laser (toujours tel que $nL = 1,5$ m) contient un nombre quelconque (entier) N de modes, de fréquences $p \times \delta \nu$ où p est un nombre entier positif allant de p_1 à $p_2 = p_1 + N - 1$. Ces modes sont supposés parfaitement monochromatiques et de même intensité I_0 à la sortie du laser. Les phases à l'origine des différents modes sont aléatoires et n'ont aucune relation entre elles. On posera ϕ_{pq} le déphasage à $t = 0$ entre les modes repérés par les indices p et q .

- Déterminer l'allure de l'intensité mesurée par un photodétecteur rapide, dont le temps de réponse est inférieur à la nanoseconde, puis par un photodétecteur à réponse lente.

(II.5) Avec un milieu amplificateur solide, il est possible d'exciter un très grand nombre de modes de la cavité du laser. On réalise ainsi un laser *multimode*, émettant sur N modes dont les longueurs d'ondes s'échelonnent de $\lambda_2 = 760$ nm à $\lambda_1 = 865$ nm. Les fréquences des modes s'échelonnent de $p_1 \times \delta \nu$ à $p_2 \times \delta \nu$ on suppose à nouveau tous les modes parfaitement monochromatiques et de même intensité I_0 à la sortie du laser. La longueur effective nL de la cavité est toujours égale à 1,5 m.

(II.5.a) Déterminer numériquement des valeurs approchées de p_1 , p_2 et de N .

(II.5.b) Par un procédé non décrit ici, qui repose sur une dépendance de l'indice de réfraction n avec l'intensité lumineuse, on arrive à synchroniser tous les modes entre eux. Un tel laser est appelé *laser à modes bloqués*. Par un choix convenable de l'origine des temps, on peut poser dans le faisceau sortant, pour le mode repéré par l'indice p :

$$s_p = s_0 \cos(p \delta \omega t), \text{ soit en notation complexe } s_p = s_0 \exp(i p \delta \omega t). \quad (15)$$

- Quelle est la valeur maximale de s , amplitude totale du champ émis par le laser ?
- À quels instants t cette amplitude maximale est-elle atteinte ? On fera un raisonnement simple, sans chercher à déterminer l'expression de $s(t)$ et on exprimera ces valeurs de t en fonction des paramètres n , L , c et d'un nombre entier q .

(II.5.c) Un calcul non demandé aboutit à l'expression suivante pour l'amplitude totale du champ à la sortie

du laser :

$$s(t) = G(t) \cos(\omega_0 t) \quad (16)$$

$$G(t) = s_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)} \quad (17)$$

avec $\omega_0 = (p_1 + p_2)/2$ et

- Déterminer à partir de cette expression le maximum de $|G(t)|$ et les instants t auxquels ce maximum est atteint.
- Tracer très schématiquement l'allure de $G(t)$ puis $s(t)$, sans chercher à en donner une représentation exacte.
- Déterminer la largeur Δt des pics principaux de $G(t)$, définie par l'écart entre les deux valeurs de t qui encadrent un maximum et pour lesquelles $G(t)$ s'annule.
- Déterminer numériquement la durée Δt des impulsions et leur fréquence de répétition ν_{imp} . Quel est l'ordre de grandeur du nombre de périodes à l'intérieur d'une impulsion ? Commenter.

Troisième partie

III Métrologie des fréquences optiques

(III.1) Décrire brièvement une méthode de mesure de la fréquence d'une onde lumineuse, reposant sur la détermination de sa longueur d'onde.

(III.2) On connaît avec précision la fréquence ν_1 d'une onde émise par un laser monomode qu'il est possible de relier à celle fixée d'une transition atomique (*cf.* question II.2). Il est possible de mesurer très précisément la fréquence ν_2 a priori inconnue mais voisine de ν_1 , d'un autre faisceau laser grâce au montage représenté sur la figure 6.

- Expliquer le principe de la méthode. Si le détecteur a un temps de réponse τ_R de 1 ns, estimer la plage de fréquences accessible à une telle mesure.

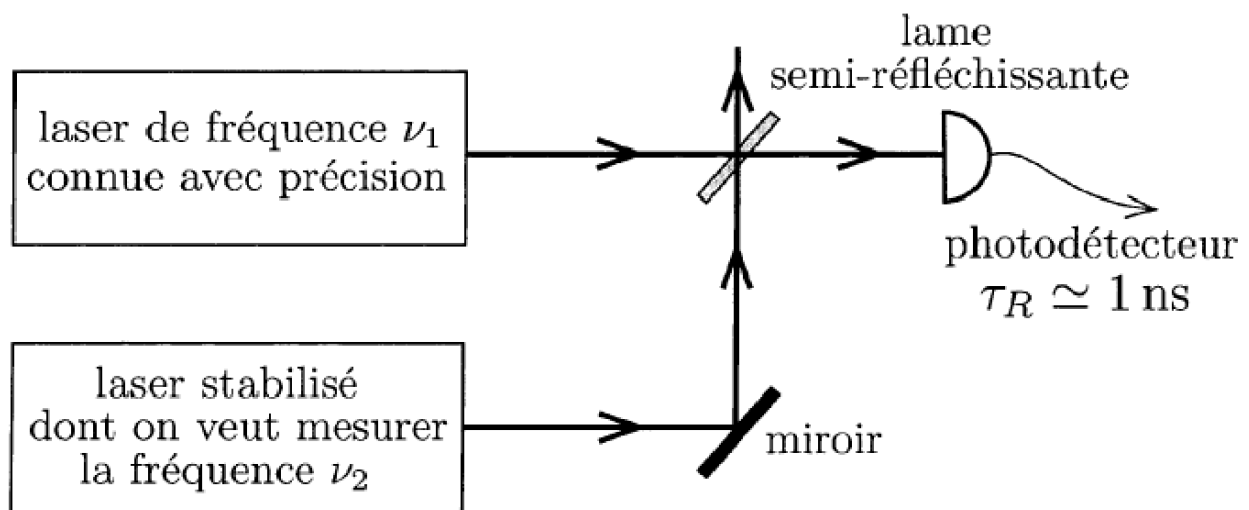


Figure 6: Mesure de la fréquence ν_2 d'un laser en se référant à un laser monomode de fréquence ν_1 connue.

(III.3) Les lasers à modes bloqués émettant des impulsions ultra-courtes (cf. question II.5) ont récemment permis de développer des méthodes de mesure de fréquence optique par comparaison **directe** avec un étalon de fréquence pourtant très éloigné dans le domaine spectral, comme par exemple une horloge atomique délivrant un signal hyperfréquence.

Reprenons l'expression de l'amplitude de l'onde issue du laser à modes bloqués :

$$s(t) = s_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)} \cos(\omega_0 t) \quad (18)$$

qui correspond à la superposition de N modes synchrones d'oscillation du laser.

(a) L'onde émise par cette source laser ultra-courte est détectée au moyen d'un photodétecteur dont le temps de réponse τ_R est de 1 ns.

Un tel photorécepteur peut-il résoudre temporellement des impulsions lumineuses dont la cadence de répétition correspond à une fréquence $\nu_{\text{imp}} = 100$ MHz ? Le compteur d'impulsions lumineuses, étalonné à partir d'une horloge dans le domaine des hyperfréquences, pilote une cale piézo-électrique qui ajuste la longueur effective nL de la cavité pour que la cadence de répétition des impulsions soit

$$\nu_{\text{imp}} = (100\,000\,000 \pm 1) \text{ Hz.}$$

Avec quelle précision doit-on maintenir la longueur effective nL constante pour assurer la stabilité à 1 Hz près de la cadence de répétition ν_{imp} des impulsions ?

(b) On souhaite mesurer avec une très grande précision la fréquence ν d'un laser continu à émission monomode. Un dispositif interférométrique permet de mesurer cette fréquence avec une précision de 140 MHz, donnant comme résultat :

$$\nu = (385\,285\,140 \pm 40) \text{ MHz.}$$

Par ailleurs, ν peut s'exprimer avec ν_{imp} comme unité :

$$\nu = p_0 \times \nu_{\text{imp}} + \eta \times \nu_{\text{imp}} \quad \text{avec } p_0 \text{ entier et } |\eta| < 0,5. \quad (19)$$

Déterminer les deux valeurs de p_0 compatibles avec cette mesure.

(c) Si on suppose p_0 connu exactement, il reste alors, pour connaître précisément la fréquence ν du laser, à mesurer la différence $(\nu - p_0 \times \nu_{\text{imp}})$. On utilise pour cela le montage représenté schématiquement sur la figure 7.

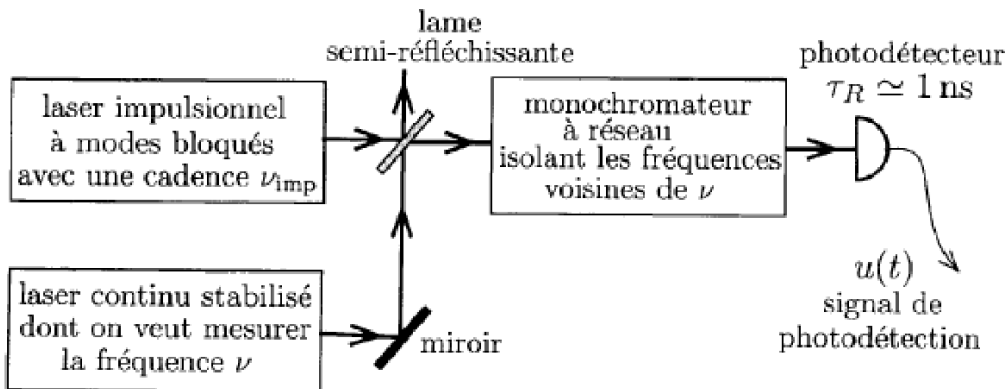


Figure 7: Comparaison de fréquences entre un laser stabilisé et un laser impulsionnel à modes bloqués. On rappelle que le photodétecteur délivre un signal électrique $u(t)$ proportionnel à l'intensité $I(t)$ qu'il mesure sur le faisceau lumineux détecté.

- Le monochromateur ne laisse passer que les ondes monochromatiques dont la fréquence est comprise entre les deux valeurs $(p_o - 1/2) \times v_{imp}$ et $(p_o + 1/2) \times v_{imp}$. Justifier que $u(t)$ est un signal périodique et donner sa période.
- En fait, le monochromateur laisse passer une bande de fréquence bien plus large. Comment traiter le signal électrique $u(t)$ délivré par le photodétecteur pour conserver uniquement la partie permettant de mesurer $(\eta \times v_{imp})$.
- (d) Applications numériques.

Pour l'onde décrite à la question (III.3.c), le photodétecteur délivre un signal $u(t)$ dont les composantes harmoniques de plus basse fréquence sont à (30 ± 1) MHz et (70 ± 1) MHz.

- Déterminer les deux valeurs possibles de la fréquence v .
 - Pour lever l'ambiguïté on modifie légèrement la longueur L de la cavité de façon à augmenter légèrement (de quelques Hz) la cadence de répétition v_{imp} des impulsions laser. Les deux composantes harmoniques de plus basse fréquence passent alors à (22 ± 1) MHz et (78 ± 1) **MHz**. En déduire la valeur de la fréquence v ainsi que l'incertitude sur cette mesure.
- Quel est le gain en précision par rapport à la première mesure interférométrique ?

L'invention par Theodor W. HÄNSCH et John L. HALL de cette méthode des "peignes de fréquences optiques" leur a valu le Prix Nobel de Physique 2005.

- o-

FIN DE L'ÉPREUVE

- o -