

08.09.2022

Тема: Розв'язування задач з використанням теорем синусів і косинусів

Посилання

на

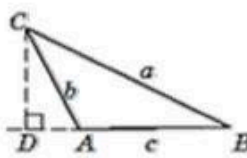
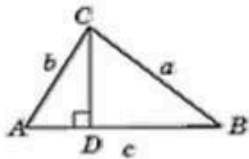
підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Матеріали до теми:



## Теорема синусів



Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

де  $a, b, c$  — сторони трикутника, протилежні кутам  $A, B, C$  відповідно.

**Доведення**

1. Провести висоту  $CD$ .
2. Виразити  $CD$  через  $b$  і кут  $A$ .
3. Виразити  $CD$  через  $a$  і кут  $B$ .
4. Порівняти здобуті для  $CD$  вирази.

! **Зауваження:** теорему синусів можна записати у вигляді:

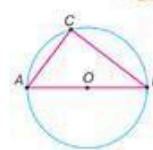
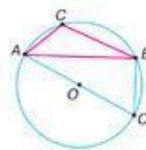
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ або } a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$$

## Наслідки з теореми синусів



**Наслідок 1.** У будь-якому  $\Delta$  відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, опсаного навколо цього  $\Delta$ .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



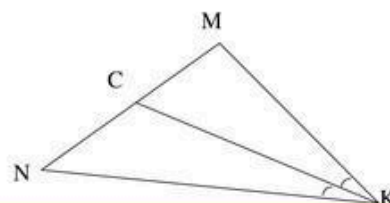
**Увага!**  $a=2R\sin A$ ,  $b=2R\sin B$ ,  $c=2R\sin C$

**Наслідок 2.** У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.

**Наслідок 3.** (властивість бісектриси) Бісектриса кута  $\Delta$  ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

KC – бісектриса, тоді

$$\frac{MC}{NC} = \frac{KM}{KN}$$



## Виконання вправ

**Приклад.** У трикутнику ABC дано  $b = 9$  см,  $c = 11$  см,  $\angle B = 50^\circ$ . Знайти  $\angle C$ ,  $\angle A$ .

**Дано:**  $\Delta ABC$  (див рис.),  $AC = 9$  см,  $AB = 11$  см,  $\angle B = 50^\circ$ .

**Знайти:**  $\angle A$ ,  $\angle C$ .

### Розв'язання

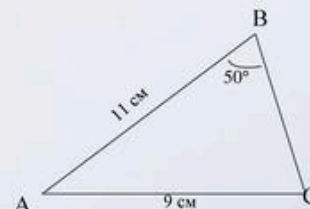
За теоремою синусів  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\text{Звідси } \sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b} = \frac{11 \cdot \sin 50^\circ}{9} \approx \frac{11 \cdot 0,766}{9} \approx 0,936$$

Цьому значенню синуса відповідає два кути  $\approx 69^\circ$  і  $\approx 111^\circ$ .

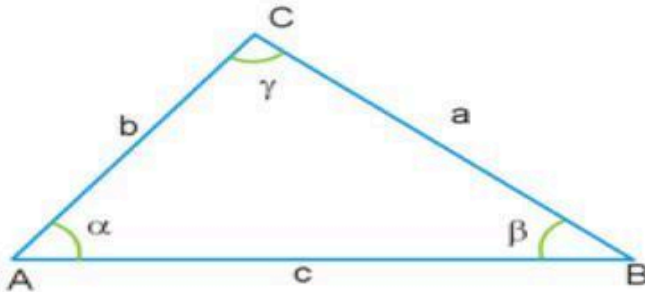
Тоді  $\angle A = 180^\circ - (\angle C + \angle B)$ ,  $\angle A = 180^\circ - (50^\circ + 69^\circ) = 61^\circ$  або  $\angle A = 180^\circ - (50^\circ + 111^\circ) = 19^\circ$ .

**Відповідь.**  $\approx 69^\circ$ ,  $\approx 61^\circ$  або  $\approx 111^\circ$ ,  $\approx 19^\circ$ .



# Теорема косинусів

- Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

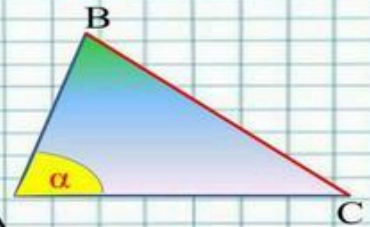
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

## Наслідки з теореми косинусів

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$



Якщо  $a^2 > b^2 + c^2$ ,  $\cos \angle A < 0$

$\angle A$  – тупий, трикутник тупокутний.

Якщо  $a^2 = b^2 + c^2$ ,  $\cos \angle A = 0$

$\angle A$  – прямий, трикутник прямокутний.

Якщо  $a^2 < b^2 + c^2$ ,  $\cos \angle A > 0$

$\angle A$  – гострий, трикутник гострокутний.





## Чому теорему косинусів називають узагальненою теоремою Піфагора ?

Теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів :

якщо в трикутнику  $\angle C$  - прямий, тоді  $\cos C = 0$

Із рівності  $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$

Одержимо:  $c^2 = a^2 + b^2$

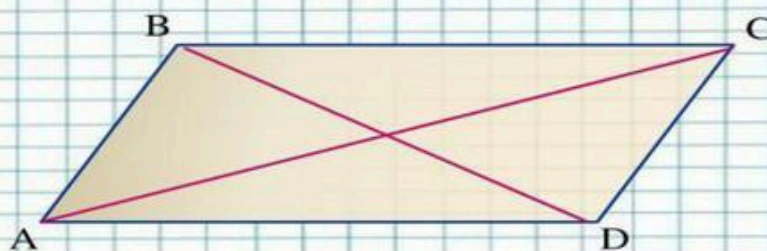
Іншими словами, це теорема Піфагора.

Хоча теорема косинусів є більш узагальненою ніж теорема Піфагора, вона не може використовуватись для її доведення, оскільки теорема Піфагора сама використовується для доведення теореми косинусів.

### Наслідки з теореми косинусів

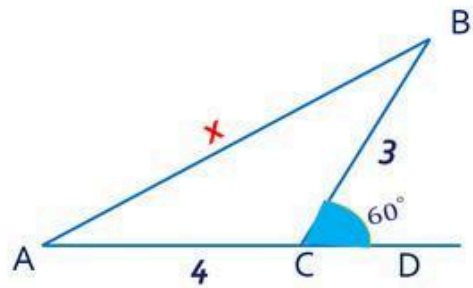
*Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін*

$$BD^2 + AC^2 = 2 \cdot (AB^2 + BC^2)$$



## Задачі на готових малюнках

### Теорема косинусів



$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BCD \text{ (суміжні)}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$$

### Задача №2

Дано :  $\triangle ABC$

$BC = 3 \text{ см}$

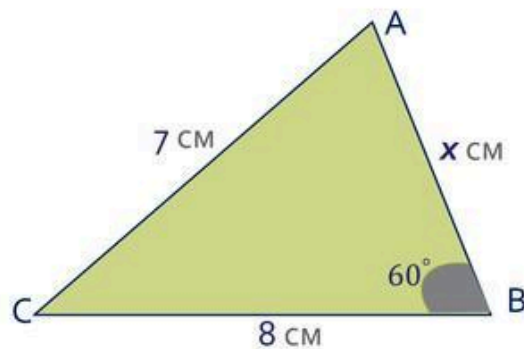
$AC = 4 \text{ см}$

$\angle BCD = 60^\circ$

Знайти:  $AB$

## Задачі на готових малюнках

### Теорема косинусів



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$$

$$7^2 = x^2 + 8^2 - 2x \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

### Задача №5

Дано :  $\triangle ABC$

$BC = 8 \text{ см}$

$AC = 7 \text{ см}$

$\angle B = 60^\circ$

Знайти:  $AB$

### Завдання:

1. Повторити теореми синусів і косинусів з курсу основної школи.
2. Виконати завдання:
  1. Дано сторону і два кути трикутника. Знайдіть третій кут та інші дві сторони трикутника, якщо:  $a = 20\text{см}$ ,  $\alpha = 75^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .
  2. Дано дві сторони трикутника і кут між ними. Знайдіть два кути та третю сторону трикутника, якщо:  $a = 7\text{см}$ ,  $b = 23\text{см}$ ,  $\gamma = 130^\circ$ .
  3. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 9 см. Одна з його діагоналей – 13 см. Обчисліть другу діагональ паралелограма.
  4. У трикутнику ABC  $\angle A = 54^\circ$ ,  $\angle B = 65^\circ$ . Яка з сторін трикутника найбільша?
  5. Знайдіть відстань від точки А до дерева, яке росте на другому березі річки, якщо з точки А видно це дерево під кутом  $40^\circ$  до лінії берега річки, а з точки В під кутом  $50^\circ$  і відстань між точками А і В дорівнює 20м.
  6. Футбольний м'яч знаходиться в точці А футбольного поля на відстані 23м і 24м від точки В та С відповідно. Футболіст направив м'яч у ворота. Знайдіть кут влучення м'яча у ворота, якщо ширина воріт 7м.



**ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!!** Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу [valentinatalavera@ukr.net](mailto:valentinatalavera@ukr.net), у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу [valentinatalavera@ukr.net](mailto:valentinatalavera@ukr.net).