ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ОБРАЗОВАНИЯ ВИТЕБСКОГО ОБЛАСТНОГО ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО КОМИТЕТА

О Т В Е Т Ы
второго этапа (районного, городского) республиканской олимпиады
<u>по математике</u>
для учащихся 8 – 11 классов учреждений образования Витебской области (2018-2019 учебный год)

ВИТЕБСК • 2018

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ

При проверке и оценивании работ учащихся жюри руководствуется следующими критериями оценки:

1. Решение каждой задачи оценивается **7 баллами**. Жюри не имеет права изменять цену задачи. Все оценки должны быть **целыми** числами. Задача считается решенной, если решение оценено не ниже, чем в 5 баллов и нерешенной, если оценка не превосходит 3 баллов. Оценка в 4 балла может толковаться по-разному, в зависимости от конкретной ситуации.

2. Оценки выставляются на основе следующих критериев:

Оценка в баллах	Критерии оценки
7	Верное решение
6	Верное решение с недочетами
5	Решение в целом верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки
4	Рассуждения содержат большую часть решения, но в них есть пробелы или ошибки, влияющие на ход решения
3	Решения в целом нет, но есть существенное продвижение в верном направлении
2	Решения в целом нет, но есть незначительное продвижение в верном направлении
1	Решение неверно
0	Решение отсутствует

Решение считается ***неполным***, если:

- оно содержит все необходимые идеи, но не доведено до конца;

- оно в целом верное, но содержит более или менее легко устранимые пробелы, т.е. явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя считать известными или очевидными;

- оно требует разбора нескольких возможных случаев, большая часть которых рассмотрена, но некоторые, аналогичные рассмотренным, упущены.

3. При оценке решения на олимпиаде учитываются только его *правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность.* Нельзя снижать оценку за нерациональность решения (кроме редких случаев, когда это прямо предусмотрено указаниями по проверке задачи), нетиповое его оформление, исправления, помарки и т.п.

4. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего – логические) ошибки от технических. К последним относятся, например, вычислительные ошибки в невычислительной задаче (алгебраические ошибки в вычислительной задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, как правило, следует относить к недочетам.

5. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Однако не следует требовать от них большего уровня строгости изложения, чем принято в школьной практике. На олимпиаде умение хорошо *догадываться* должно цениться выше, чем умение хорошо излагать решение.

6. Ответ, найденный логическим путем, обычно оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

Ответы, решения, указания

8 класс

№1. Ответ: $\frac{9}{124}$.

Решение.

$$\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\frac{1}{10\cdot13}+\frac{1}{13\cdot16}+\frac{1}{16\cdot19}+\frac{1}{19\cdot22}+\frac{1}{22\cdot25}+\frac{1}{25\cdot28}+\frac{1}{28\cdot31}=$$

$$=\frac{1}{3}\bullet\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\ \dots+\frac{1}{28}-\frac{1}{31}\right)=\frac{1}{3}\bullet\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{31}\right)=\frac{9}{124}$$

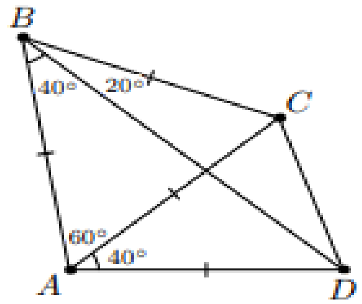
.

№2. Ответ: 112.

Решение. Рассмотрим первую сотню натуральных чисел. Среди этих чисел десять квадратов (от $1^2=1$ до $10^2=100$) и четыре куба (от $1^3=1$ до $4^3=64$). Два из этих чисел (1 и 64) являются одновременно квадратами и кубами. Значит, из первой сотни вычеркнули 12 чисел. Среди следующих 12 чисел нет ни квадратов, ни кубов, следовательно, среди оставшихся чисел на сотом месте стоит число 112.

№3. Ответ: 30^0

Решение.



В треугольнике ABD: $\angle ABD = 40°$, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 100°$, значит $\angle BDA = 40°$ и треугольник ABD – равнобедренный. Таким образом, $AB = BC = AC = AD$, поэтому треугольник CAD – также равнобедренный. Тогда $\angle ADC = \angle ACD = 70°$, находим нужный угол $\angle CDB = 30°$.

№4. Ответ: 8 коробок и 90 волшебных конфет.

Решение. Пусть у Феи было x коробок. Тогда, согласно условию, в последнюю коробку она положила $x + 1$ конфету, и это составляет ровно десятую часть всех конфет. Значит, у Феи $10x + 10$ конфет. Имеем уравнение $x + 10x + 10 = 98$, откуда $x = 8$.

У Феи 8 коробок и 90 волшебных конфет.

№5. Ответ: 17.

Решение. Остаток при делении числа на 3 не превосходит 2, остаток при делении на 6 не превосходит 5, остаток при делении на 9 не превосходит 8. Так как сумма этих остатков равна 15=2+5+8, они равны соответственно 2, 5 и 8. Задуманное число, увеличенное на 1, делится на 3, 6 и 9, значит, оно делится и на 18. Следовательно, задуманное Таней число при делении на 18 дает остаток 17.

9 класс

№1. Ответ: нет.

Решение. Преобразуем данное уравнение $(x^2-3)^2-4x^3-3x=0$,

$(x^2-3)^2=x(4x^2+3)$. Если $x<0$, то $(x^2-3)^2\geq 0$, а $x(4x^2+3)<0$, значит, полученное равенство при любом отрицательном значении x будет неверным. Следовательно, отрицательных корней нет.

№2. Ответ: Боря не прав.

Решение.

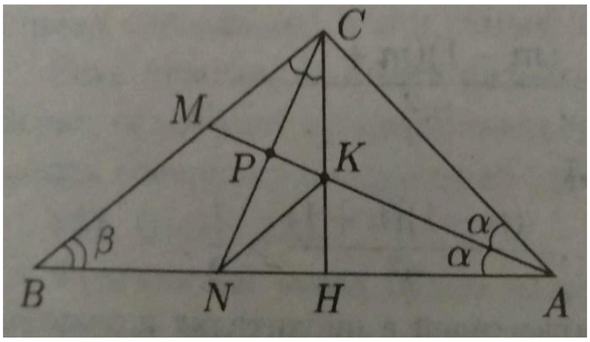
1	1	1	1
1	1	1	5
1	2	5	5
2	2	2	5

Пример расстановки, в которой ни одно из перечисленных условий не выполняется, смотреть на рисунке.

В данной задаче достаточно привести пример.

№3. Ответ: 9 см.

Решение.



Пусть $\alpha = \frac{1}{2}\angle CAB$, $\beta = \angle CBA$.Так как по условию треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C, то $2\alpha + \beta = 90°$. Согласно условию CH – высота треугольника ABC, поэтому из прямоугольных треугольников CHA, CHB находим соответственно: $\angle HCA = \beta$, $\angle HCB = 2\alpha$. Так как по условию CN – биссектриса $\angle HCB$, то $\angle NCB = \angle NCH = \alpha$. Тогда $\angle NCA = \angle NCH + \angle HCA = \alpha + \beta$, а поскольку $\angle ANC$ – внешний угол треугольника BNC, то $\angle ANC = \alpha + \beta$. Следовательно, треугольник ANC равнобедренный с боковыми сторонами $AC = AN$. Пусть P, M – точки пересечения биссектрисы AK с биссектрисой CN и стороной BC соответственно. Так как AP – биссектриса равнобедренного треугольника ANC, проведенная к основанию, то $AP \perp CN$, $CP = PN$. Поэтому KP является медианой и высотой треугольника CKN, следовательно, этот треугольник является равнобедренным с боковыми сторонами $KN = KC = 9$ см.

№4. Ответ: 8.

Решение. Так как все номера карточек различны, то, очевидно, в каждой «хорошей» коробке наибольший номер карточки равен произведению остальных, причем этих остальных номеров – не меньше двух. Наименьший номер в каждой «хорошей» коробке должен быть однозначным (т.к. иначе $10 \cdot 11 > 90$). Поэтому количество «хороших» коробок не больше 9. Докажем, что их не 9. Если бы «хороших» коробок было 9, то в каждой их них по одному однозначному номеру. Рассмотрим коробку, в которую попал номер 1. Другие однозначные номера в ней отсутствуют. Значит, остальные номера – двузначные. Если таких карточек только две, то их номера должны совпадать, если три и больше, то произведение будет превышать 110, противоречие. Для 8 хороших коробок можно привести следующий пример (все не указанные номера поместили в обычные коробки): $2 \cdot 17 = 34$, $3 \cdot 16 = 48$, $4 \cdot 15 = 60$, $5 \cdot 14 = 70$, $6 \cdot 13 = 78$,

$7 \cdot 12 = 84$, $8 \cdot 11 = 88$, $9 \cdot 10 = 90$.

№5. Решение. Перегруппировывая слагаемые в левой части неравенства, преобразуем ее к виду $b(a - c)^2 + a(b - c)^2 + c(b - a)^2$, после чего неравенство становится очевидным.

10 класс

№1. Ответ: при $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^2 - yx + \left(y^2 - y + \frac{1}{3}\right) = 0$ и рассмотрим его как квадратное уравнение относительно x. Найдем дискриминант $D =- 3(y - \frac{2}{3})^2$. Квадратное уравнение имеет корни, если $D =- 3(y - \frac{2}{3})^2 \geq 0$, то есть если $y = \frac{2}{3}$. Подставив это значение в исходное уравнение, получим, что $x = \frac{1}{3}$.

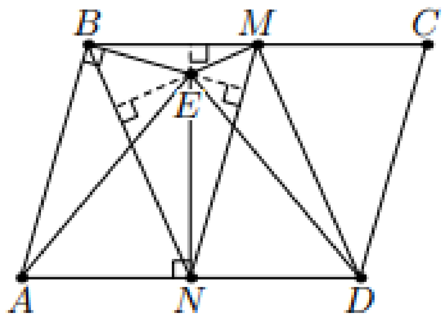
№2. Ответ: 72.

Решение. 100! делится на 2^{97} (каждое второе число в разложении делится на 2, таких чисел 50, каждое четвертое – на 2^2, таких чисел 25, каждое восьмое –

на 2^3, таких чисел 12, каждое шестнадцатое – на 2^4, таких чисел 6, каждое тридцать второе – на 2^5, таких чисел 3, и, наконец, одно число делится на 64, всего 97 двоек) и на 3^{48} (подсчет аналогичен предыдущему), то есть на $2^{97} \bullet 3^{48} = 2\cdot 12^{48}$. Поэтому после сокращения знаменатель будет равен $\frac{12^2}{2} = 72$.

№3. Ответ: $90°$

Решение.



Поскольку $AD \parallel BC$ и $BM = MC = AN = ND = AD/2$, четырехугольники $ABMN$, $BMDN$ – параллелограммы, откуда $AB \parallel MN$ и $BN \parallel DM$. Так как $\angle ABE = 90°$ и $AB \parallel MN$, получаем $BE \perp MN$. Таким образом, E – точка пересечения высот треугольника BMN, откуда $ME \perp BN$. Наконец, из $BN \parallel DM$, получаем $ME \perp DM$, то есть $\angle DME = 90°$.

№4. Ответ: 2 булки, 5 бубликов, 7 слоек или 6 булок, 3 бублика, 5 слоек.

Решение. Так как сумма цен купленных изделий равна 2 рубля 10 копеек, то возможны лишь два случая:

1) были куплены пирожки, бублики и пирожные (50+60+100=210);
2) были куплены бублики, булки, слойки (60+70+80=210).
Обозначим количество купленных пирожков через x, бубликов – y, булок – z, слоек – t, пирожных – u.

Рассмотрим указанные случаи:

1) $\{x + y + u = 14;\ 50x + 60y + 100u = 1000$
Исключая x, получим уравнение $y = 5(6 - u)$, из которого следует (с учетом того, что никаких изделий не было куплено больше 7), что $y = 5$. Тогда $u = 5$ – противоречие с условием, значит система (1) не имеет решений.

2) $\{y + z + t = 14;\ 60y + 70z + 80t = 1000$

Из второго условия следует, что $z -$ четное, кроме того, исключая y, имеем $t = 8 - \frac{z}{2}$. Учитывая условие $z \leq 7$, перебором получим:

а) $z = 2$, тогда $t = 7$; $y = 5$;

б) $z = 4,\ t = 6,\ y = 4$. Случай не удовлетворяет условию задачи.

в) $z = 6,\ t = 5,\ y = 3$.

№5. Решение. Докажем методом от противного: пусть при $x > y > z > 0$ верным является $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}$. Умножим обе части на xyz, и попарно группируя, получим $xz(x - z) + xy(y - x) + yz(z - y) \geq 0$. Так как $x - z = (x - y) + (y - z)$, то наше неравенство после приведения подобных членов и выделения множителей преобразуется к виду

$(y - x)(z - y)(z - x) \geq 0$. С учетом условия получаем противоречие, значит, наше предположение неверно, тогда верным является исходное неравенство.

11 класс

№1. Ответ: 2; $\frac{7}{26}$**.**

Решение. Умножим и разделим левую часть уравнения на

$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2}$, предполагая при этом, что $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} \neq \sqrt{3x^2 - 7x + 2}$, т.е. $x \neq -2,\ 5$.

Тогда $\frac{3x^2-5x+7-3x^2+7x-2}{\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2}} = 3, \sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = \frac{2x+5}{3}.$

Складываем полученное уравнение с заданным: $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{x+7}{3}$. Отсюда следует, что $x \geq - 7$.

Возведем в квадрат обе части полученного уравнения, приведем подобные слагаемые: $26x^2 - 59x + 14 = 0$, $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{7}{26}$.

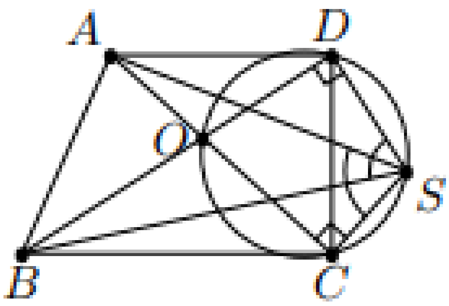
Непосредственной подстановкой убеждаемся, что найденные значения x являются корнями заданного уравнения. Кроме того, убедимся, что

$x =- 2,5$ не удовлетворяет заданному уравнению.

№2. Ответ: 50.

Решение. Все члены последовательности кратны первому члену. Тогда первый член – делитель числа 275. Так как $a_1 > 1$, получаем, что a_1 не меньше пяти, сумма десяти первых членов не меньше, чем $5 + 10 + 15 + ... + 50 = 275$, а равенство возможно лишь в случае именно арифметической прогрессии $5,\ 10,\ 15,\ 20,\ ...,\ 50$.

№3. Решение.



Так как SO – диаметр, то $\angle SCA = \angle SCO = \angle SDO = \angle SDB = 90°$. Для решения достаточно доказать подобие прямоугольных треугольников $SCA,\ SDB$. Из подобия будет следовать равенство углов $\angle CSA = \angle DSB$, откуда $\angle BSC = \angle CSA - \angle ASB = \angle DSB - \angle ASB = \angle ASD$. Достаточно показать, что $\frac{AC}{BD} = \frac{SC}{SD}$. Из прямоугольных треугольников ADC, BCD имеем $\frac{AC}{BD} = \frac{CD}{cos\angle OCD} : \frac{CD}{cos\angle ODC} = \frac{cos\angle ODC}{cos\angle OCD}$. Так как $\angle OCD = 90° - \angle SCD$, то $cos\angle OCD = sin\angle SCD$. Аналогично $cos\angle ODC = sin\angle SDC$. Отсюда $\frac{AC}{BD} = \frac{sin\angle SDC}{sin\angle SCD} = \frac{SC}{SD}$ (последнее равенство следует из теоремы синусов), откуда и следует требуемое подобие.

№4. Ответ: 189.

Решение. Пусть Борис собрал в первый день x грибов, а во второй день – y грибов. Тогда Андрей собрал $\frac{3}{4}x$ и $\frac{6}{5}y$ грибов соответственно. По условию $\frac{11}{10}(x + y) = \frac{3}{4}x + \frac{6}{5}y$. Решая это уравнение, получим $7x = 2y$. Из условия задачи следует, что числа x, y являются натуральными, причем x кратно 4, а y кратно 5. Пусть $x = 4k, y = 5n$, где k, n – натуральные числа. Тогда $14k = 5n$. Так как 14 и 5 взаимно просты, то получаем, что k кратно 5, n кратно 14. Таким образом, наименьшими являются $k = 5; n = 14$. Следовательно, $x = 20; y = 70$. Общее число грибов $\frac{7}{4}x + \frac{11}{5}y = 35 + 154 = 189$.

№5. Ответ: 4; 2.

Решение. Пусть x и y – искомые числа ($x > y$, так как их разность – факториал). Так как частное от деления одного из них на другое – факториал, то x нацело делится на y. Пусть $x = ky$, где k – натуральное число, большее 1, и $x + y = a!$, $x - y = b!$. Тогда $a > b$ и $a!$ нацело делится на $b!$. Значит, $x + y$ кратно числу $x - y$, т.е. $\frac{x+y}{x-y} = \frac{ky+y}{ky-y} = \frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1}$

Тогда $k = 2$ или $k = 3$. Число k – факториал, откуда $k = 2$. Но из равенства $\frac{a!}{b!} = 3$ следует, что $a = 3, b = 2$. Получаем, что $x = 4, y = 2$.