§1. Системы счисления

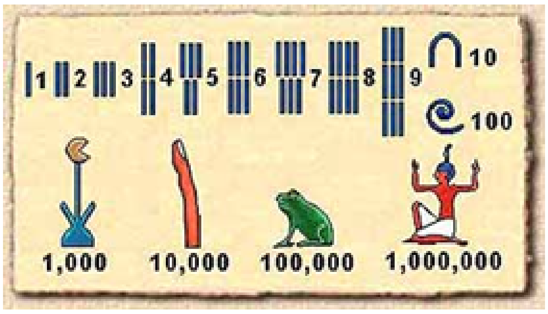
1.1. Общие сведения о системах счисления

Система счисления - это знаковая система, в которой приняты определенные правила записи чисел.

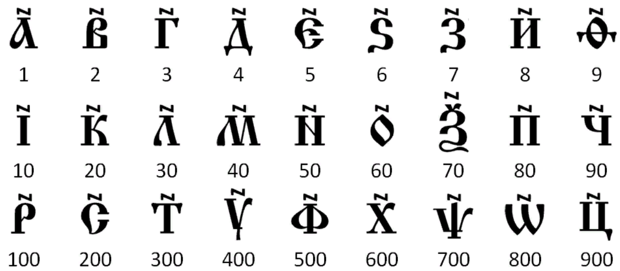
Знаки, с помощью которых записываются числа, называются ***цифрами***, а их совокупность - ***алфавитом системы счисления***.

Примеры:

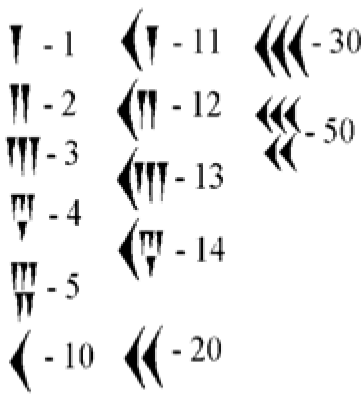
Египетская система счисления



Древнеславянская система счисления



Вавилонская система счисления



Системы счисления различаются выбором узловых чисел и способами образования алгоритмических чисел. Можно выделить следующие виды систем счисления:

1. Унарная система;
2. Непозиционные системы;
3. Позиционные системы.

1. Унарная система счисления

Простейшая и самая древняя система - так называемая унарная система счисления.

В ней для записи любых чисел используется всего один символ - палочка, узелок, зарубка, камушек.

Примеры:

2. Непозиционная система счисления

Система счисления называется ***непозиционной***, если количественный эквивалент (количественное значение) цифры в числе не зависит от её положения в записи числа.

Пример:

Римская система счисления

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M
1	5	10	50	100	500	1000
III,	IV,	VI,	XL,	LX,	XC,	CIX
3	4	6	40	50	90	109

Пример перевода из десятичной СС в Римскую : **1935 = MCMXXXV**

Здесь ***алгоритмические*** числа получаются путем сложения и вычитания *узловых* чисел с учётом следующего правила: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

3. Позиционная система счисления

Система счисления называется ***позиционной***, если количественный эквивалент цифры в числе зависит от её положения в записи числа.

Основание позиционной системы счисления равно количеству цифр, составляющих её алфавит.

Пример:

Десятичная система счисления

Алфавит десятичной системы составляют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Цифры 1234567890 сложились в Индии около 400 г. н. э.

Арабы стали пользоваться подобной нумерацией около 800 г. н. э.

Примерно в 1200 г. н. э. эту нумерацию начали применять в Европе.

Основанием позиционной системы счисления может служить любое натуральное число q > 1. Алфавитом произвольной позиционной системы счисления с основанием q служат числа 0, 1, ..., q-1, каждое из которых может быть записано с помощью одного уникального символа; младшей цифрой всегда является 0.

Основные достоинства любой позиционной системы счисления - простота выполнения арифметических операций и ограниченное количество символов, необходимых для записи любых чисел.

В позиционной системе счисления с основанием q любое число может быть представлено в виде:

$$\mathbf{A_q = \pm(a_{n-1} * q^{n-1} + a_{n-2} * q^{n-2} + \ldots + a_0 * q^0 + a_{-1} * q^{-1} + \ldots + a_{-m} * q^{-m})}$$

Здесь:

A — число;

q — основание системы счисления;

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество целых разрядов числа;

m — количество дробных разрядов числа;

q^i — «вес» i-го разряда.

Такая запись числа называется развернутой формой записи.

Примеры записи чисел в развернутой форме:

$2012=2*10^3 +0*10^2 +1*10^1 +2*10^0$

$0{,}125=1*10^{-1} +2*10^{-2} +5*10^{-3}$

$14351{,}1=1*10^4 +4*10^3 +3*10^2 +5*10^1 +1*10^0 +1*10^{-1}$

Всю изложенную выше информацию вы можете посмотреть в видеоуроке по ссылке:
[Общие сведения о системах счисления]

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Переведите число из римской системы счисления в десятичную: MCMXCIX =

Задание 2. Запишите десятичное число в римской системе счисления: 145 =

Задание 3. А. С. Пушкин родился в MDCCXCIX году. Запишите год в десятичной форме

Задание 4. Запишите пример в десятичной системе, вычислите ответ и запишите его в римской системе: MCM - XC =

1.2. Двоичная система счисления. Двоичная арифметика

Двоичной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием *2*.

Двоичный алфавит: 0 и 1.

Для целых двоичных чисел можно записать:

$a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 = a_{n-1}* 2^{n-1} + a_{n-2}* 2^{n-2} +\ldots+ a_0* 2^0$

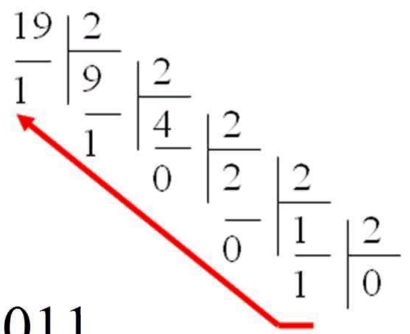
Например:

$10011_2 = 1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{10}$

Правило перевода двоичных чисел в десятичную систему счисления:

Вычислить сумму степеней двойки, соответствующих единицам в свёрнутой форме записи двоичного числа

Правило перевода целых десятичных чисел в двоичную систему счисления



10011_2

Если десятичное число достаточно большое, то более удобен следующий способ записи рассмотренного выше алгоритма:

363	181	90	45	22	11	5	2	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1

$363_{10} = 101101011_2$

Задания для самостоятельного выполнения:

Вариант 1	***Вариант 2***
Переведите в десятичную систему следующие двоичные числа: 101; 11101; 101010; 100011; 10110111011. Переведите в двоичную систему счисления следующие десятичные числа: 2; 7; 17; 68; 315; 765; 2047.	Переведите в десятичную систему следующие двоичные числа: 100; 11001; 100010; 101011; 10100111011. Переведите в двоичную систему счисления следующие десятичные числа: 4; 9; 18; 67; 415; 767; 2045

Вариант 3	*Вариант 4*
Переведите в десятичную систему следующие двоичные числа: 111; 10101; 101110; 100111; 10100111011. Переведите в двоичную систему счисления следующие десятичные числа: 5; 8; 15; 66; 317; 755; 2049.	Переведите в десятичную систему следующие двоичные числа: 101; 11101; 101010; 100011; 10110101011. Переведите в двоичную систему счисления следующие десятичные числа: 6; 10; 16; 69; 320; 865; 2051.
Вариант 5 Переведите в десятичную систему следующие двоичные числа: 101; 10111; 100010; 100011; 10100011011. Переведите в двоичную систему счисления следующие десятичные числа: 7; 11; 19; 70; 321; 781; 2055.	***Вариант 6*** Переведите в десятичную систему следующие двоичные числа: 111; 11101; 101110; 111111; 10100110011. Переведите в двоичную систему счисления следующие десятичные числа: 8; 12; 20; 71; 323; 659; 2057.
Вариант 7 Переведите в десятичную систему следующие двоичные числа: 101; 10011; 101000; 101111; 10101011011. Переведите в двоичную систему счисления следующие десятичные числа: 9; 13; 21; 72; 325; 598; 2059.	***Вариант 8*** Переведите в десятичную систему следующие двоичные числа: 100; 10101; 101100; 110101; 10100110111. Переведите в двоичную систему счисления следующие десятичные числа: 10; 14; 23; 73; 327; 679; 2061.

Двоичная арифметика

Двоичная арифметика намного проще десятичной, т.к. перенос возникает в единственном случае - при двух единицах в одноименных разрядах.

Двоичное сложение

При сложении столбиком двух цифр справа налево в двоичной системе счисления, как в любой позиционной системе, в следующий разряд может переходить только единица. Результат сложения двух положительных чисел имеет либо столько же цифр, сколько у максимального из двух слагаемых, либо на одну цифру больше, но этой цифрой может быть только единица.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$0_2 + 0_2 = 0_2$

$0_2 + 1_2 = 1_2$

$1_2 + 0_2 = 1_2$

$1_2 + 1_2 = 10_2$

Рассмотрим примеры на сложение

Пример1	Пример2	Пример3
$\begin{array}{r} 1001 \\ +\,1010 \\ \hline 10011 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1111 \\ +\quad 1 \\ \hline 10000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 101{,}011 \\ +\quad 1{,}110 \\ \hline 111{,}001 \end{array}$

Двоичное вычитание

При выполнении операции вычитания всегда из большего по абсолютной величине числа вычитается меньшее и у результата ставится соответствующий знак.

-	0	1
0	0	$\underline{1}1$
1	1	0

$0_2 - 0_2 = 0_2$

$0_2 - 1_2 = \underline{1}1_2$ ($\underline{1}$ — заем из старшего разряда)

$1_2 - 0_2 = 1_2$

$1_2 - 1_2 = 0_2$

Рассмотрим примеры на вычитание

Пример1	Пример2	Пример3
$\begin{array}{r} 1011 \\ -\quad 111 \\ \hline 100 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1100 \\ -\quad 10{,}1 \\ \hline 1001{,}1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 101{,}011 \\ -\quad 1{,}110 \\ \hline -\;\; 11{,}101 \end{array}$

Двоичное умножение

Операция умножения выполняется с использованием таблицы умножения по обычной схеме (применяемой в десятичной системе счисления) с последовательным умножением множимого на очередную цифру множителя.

×	0	1
0	0	1
1	1	10

$0_2 \times 0_2 = 0_2$

$0_2 \times 1_2 = 0_2$

$1_2 \times 0_2 = 0_2$

$1_2 \times 1_2 = 1_2$

Рассмотрим примеры на умножение

Пример 1	Пример 2	Пример3
1011 x 101 + 1011 1011 110111	10101 x 111 + 10101 10101 10101 1001001 1	101,1 x1 0 1 + 10 11 1011 11011,1

При выполнении умножения в примере 2 складываются три единицы 1+1+1=11 в соответствующем разряде пишется 1, а другая единица переносится в старший разряд.

В двоичной системе счисления операция умножения сводится к сдвигам множимого и сложению промежуточных результатов.

Двоичное деление

Операция деления выполняется по алгоритму, подобному алгоритму выполнения операции деления в десятичной системе счисления.

Рассмотрим пример на деление

```
_10111010111 | 1101
  1101         1110011
_ 10100
   1101
 _ 1111
   1101
   _ 10011
      1101
    _ 1101
      1101
         0
```

Всю изложенную выше информацию вы можете посмотреть в видеоуроках по ссылкам:

[Двоичная система счисления]

[Двоичная арифметика]

Задания для самостоятельного выполнения:

Вариант 1

1. Выполните сложение чисел.

а) $1110101010_2+10111001_2$;

б) $10111010_2+10010100_2$;

в) $111101110,1011_2+1111011110,1_2$;

2. Выполните вычитание чисел.

а) $1000000100_2-101010001_2$;

б) $1010111101_2-111000010_2$;

в) $1101000000,01_2-1001011010,011_2$;

3. Выполните умножение чисел.

а) $1001011_2*1010110_2$;

Вариант 2

1. Выполните сложение чисел.

а) $10111111_2+110010000_2$;

б) $110010100_2+1011100001_2$;

в) $1000000101,0101_2+1010000110,01_2$;

2. Выполните вычитание чисел.

а) $1000001001_2-111110100_2$;

б) $1111000101_2-1100110101_2$;

в) $1100110101,1_2-1011100011,01_2$;

3. Выполните умножение чисел.

а) $111101_2*1010111_2$;

Вариант 3

1. Выполните сложение чисел.

а) $1000100001_2+1011100110_2$;

б) $1101110011_2+111000101_2$;

в) $1011011,01_2+1000101110,1001_2$;

2. Выполните вычитание чисел.

а) $11110010_2-10101001_2$;

б) $1110100001_2-1011001001_2$;

в) $1101001010,1_2-1011101001,11011_2$;

3. Выполните умножение чисел.

а) $1001001_2*100010_2$;

Вариант 4

2. Выполните сложение чисел.

а) $11110100_2+110100001_2$;

б) $1101110_2+101001000_2$;

в) $1100110011,1_2+111000011,101_2$;

2. Выполните вычитание чисел.

а) $1000010101_2-100101000_2$;

б) $1001011011_2-101001110_2$;

в) $111111011,101_2-100000010,01_2$;

3. Выполните умножение чисел.

а) $1001000_2*1010011_2$;

1.3. Восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления

Восьмеричная система счисления

Восьмеричной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием 8.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

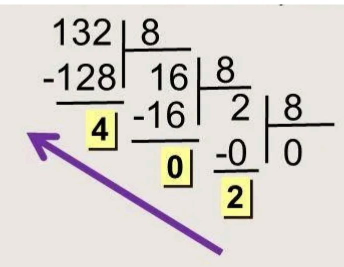
$a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 = a_{n-1} * 8^{n-1} + a_{n-2} * 8^{n-2} + \ldots + a_0 * 8^0$

Для перевода целого восьмеричного числа в десятичную систему счисления следует перейти к его развернутой записи и вычислить значение получившегося выражения.

Пример: $1063_8 = 1 * 8^3 + 0 * 8^2 + 6 * 8^1 + 3 * 8^0 = 563_{10}$.

Для перевода целого десятичного числа в восьмеричную систему счисления следует последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на 8 до тех пор, пока не получим частное, равное нулю.

Пример:



$$\mathbf{132_{10} = 204_8}$$

Задания для самостоятельного выполнения:

Вариант 1

Переведите в десятичную систему счисления следующие восьмеричные числа: 126, 452, 957

Переведите в восьмеричную систему следующие двоичные числа: 1111110, 1001010010110

Вариант 2

Переведите в десятичную систему счисления следующие восьмеричные числа: 243, 754, 623

Переведите в восьмеричную систему следующие двоичные числа: 1010111001, 1010111000001

Вариант 3

Переведите в десятичную систему счисления следующие восьмеричные числа: 452, 635, 425

Переведите в восьмеричную систему следующие двоичные числа: 1101011000, 10000101110111

Вариант 4

Переведите в десятичную систему счисления следующие восьмеричные числа: 547, 236, 456

Переведите в восьмеричную систему следующие двоичные числа: 110101010, 1000010100110

Шестнадцатеричная система счисления

Основание: $q = 16$.

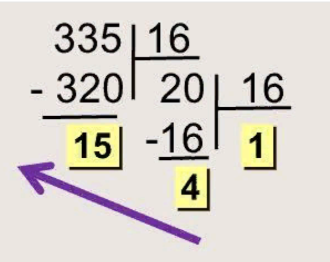
Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Для перевода целого шестнадцатеричного числа в десятичную систему счисления следует перейти к его развернутой записи и вычислить значение получившегося выражения.

Пример: $3AF_{16} = 3 * 16^2 + 10 * 16^1 + 15 * 16^0 = 768 + 160 + 15 = 943_{10}$.

Для перевода целого десятичного числа в шестнадцатеричную систему счисления следует последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на 16 до тех пор, пока не получим частное, равное нулю.

Пример:



$$\mathbf{335_{10} = 14\,F_{16}}$$

Таблица соответствия 10-х, 2-х, 8-х и 16-х чисел от 1 до 16

Десятичная система	Двоичная система	Восьмеричная система	Шестнадцатеричная система
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12

Всю изложенную выше информацию вы можете посмотреть в видеоуроках по ссылкам:

[Восьмеричная система счисления]

[Шестнадцатеричная система счисления]

1.4. Правила перевода целых десятичных чисел в систему счисления с основанием q

Перевод из десятичной системы счисления в любую другую более сложен, чем наоборот из любой в десятичную. При этом необходимо учитывать, что алгоритмы перевода целых чисел и правильных дробей различаются.

Алгоритм перевода целых чисел

Разделить данное число на основание новой системы счисления. Зафиксировать целое частное и остаток от деления (остаток всегда меньше основания).

Если полученное частное больше основания, то разделить частное на основание и вновь зафиксировать новое частное и остаток от деления.

Повторять процесс до тех пор, пока частное не получится меньше делителя.

Полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с ее алфавитом.

Записать последнее частное и полученные остатки в обратном порядке в ряд слева направо.

В качестве примера переведем 19_{10} в двоичную систему счисления согласно алгоритму.

Всю изложенную выше информацию вы можете посмотреть в видеоуроке по ссылке:
[Правило перевода целых десятичных чисел]