

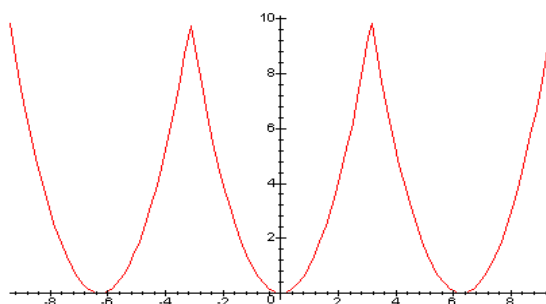
E3A 2003 PC

Epreuve de mathématiques A

Corrigé

Partie I

1) On obtient de suite la courbe suivante :



2) f est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$, 2π -périodique, et $f(-\pi)=f(\pi)$. Il s'en suit que f est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

3) Par parité, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Avec une double intégration par parties, on obtient :

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Enfin, une intégration directe fournit :

4) f est périodique, continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. On a en particulier la convergence simple qui permet d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

5) Pour $x=0$, la formule ci-dessus fournit : $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

On trouve de même avec $x=\pi$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II

1) Soit n un entier naturel. f_n est alors continue sur $]0,1]$, et on a au voisinage de 0 :

$$f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Or, la fonction $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$. Donc f_n est intégrable sur $]0, 1]$.

Autre preuve :

Pour $n \geq 1$, f_n est en fait prolongeable par continuité au segment $[0, 1]$, et est donc à ce titre intégrable sur $[0, 1]$.

Le cas $n=0$ est par ailleurs bien connu, et peut par exemple se traiter par un calcul direct de la limite de l'intégrale en remarquant que f_n est de signe constant sur $]0, 1]$.

Pour $\varepsilon \in]0, 1]$, on fait une intégration par parties :

$$\int_{\varepsilon}^1 t^n \ln(t) dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^n}{n+1} dt$$

En remarquant l'intégrabilité sur $[0, 1]$ de $t \rightarrow \frac{t^n}{n+1}$ (car continue sur le segment $[0, 1]$), on obtient alors, en faisant tendre ε vers 0 par valeurs supérieures :

$$\int_0^1 t^n \ln(t) dt = - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Finalement :
$$u_n = - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

2-i) On sait que pour $t \in]-1, 1[$, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}$.

On en déduit que, pour $t \in]0, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \ln(t) = \frac{\ln(t)}{1-t} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \ln(t) = \frac{\ln(t)}{1+t}.$$

En d'autres termes :

$\sum f_n$ converge simplement vers $-g$ et $\sum (-1)^n f_n$ converge simplement vers h sur $]0, 1[$.

2-ii) Intégrabilité de g :

g est de signe constant sur $]0, 1[$ et on a $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\boxtimes} -\ln(t)$ et on a déjà vu l'intégrabilité de $\ln$ sur $]0, 1/2]$. Par ailleurs, le changement de variable $t=1-h$ montre aisément que $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = 1$ et donc g est continue, donc intégrable sur le segment $[1/2, 1]$. Au final, g est intégrable sur $]0, 1[$.

Intégrabilité de h :

h est continue sur $]0, 1]$, de signe constant, et $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\boxtimes} \ln(t)$, ce qui assure de même que h est intégrable sur $]0, 1[$.

Calcul de I :

- Les applications f_n sont toutes continues et intégrables sur $]0, 1[$ et $\sum f_n$ converge simplement vers $-g$ sur cet intervalle, et $-g$ est continue.

- La série numérique $\sum \int_0^1 |f_n|$, en d'autres termes la série $\sum -u_n = \sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, on a :

$$\int_0^1 -g = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

Et donc : $I = \int_0^1 g = \frac{\pi^2}{6}$.

Calcul de J :

La même utilisation du théorème montre que :

$$\int_0^1 h = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Et donc : $J = -\frac{\pi^2}{12}$.

Partie III

1) h_n est continue sur $]0, 1]$ et on a en 0 : $|h_n(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |f_n(t)|$ et on a déjà établi l'intégrabilité de f_n sur $]0, 1]$. Donc h_n est intégrable sur $]0, 1]$.

2) On a clairement :

- Les h_n sont toutes continues et intégrables sur $]0, 1]$, donc a fortiori sur $]0, 1[$.
- (h_n) converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction nulle θ qui est continue.
- Pour tout $t \in]0, 1[$, la suite numérique $(h_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, θ est intégrable sur $]0, 1[$, donc la suite $\left(\int_0^1 h_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 \theta = 0$. En

d'autres termes : $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$.

3-i) On applique cette fois le théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions :

- Les h_n sont toutes continues et intégrables sur $]0, 1]$, donc a fortiori sur $]0, 1[$.

- $\sum h_n$ converge simplement vers $u : t \rightarrow \frac{\ln(t)}{1-t^2}$ sur $]0, 1[$, et u est continue sur $]0, 1[$.
- Les h_n sont toutes négatives.

De plus, u est intégrable sur $]0, 1[$: en effet u est continue sur $]0, 1[$ et on a $\lim_{t \rightarrow 0} |u(t)| = -\ln(t)$, fonction dont on a déjà démontré l'intégrabilité sur $]0, 1]$, donc a fortiori sur $]0, \frac{1}{2}]$; enfin, $\lim_{t \rightarrow 1} u(t) = -\frac{1}{2}$ et donc u est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 h_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 h_n = \int_0^1 u$. En d'autres termes : $S = \sum_{n=0}^{\infty} J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt$.

3-ii) En reprenant cette dernière écriture, on a :

$$S = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \ln(t) dt = \frac{1}{2} (J - I) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{6} \right).$$

Donc : $S = -\frac{\pi^2}{8}$.

4) On a vu que $\sum J_n$ converge, et de plus : $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \leq 0$. Donc $\sum |J_n| = \sum -J_n$ converge. Par suite, $\sum (-1)^n J_n$ converge absolument.

Partie IV

1) On a immédiatement : $J_n + J_{n+1} = u_n$. En multipliant par $(-1)^n$ on obtient alors : $R_n - R_{n+1} = (-1)^n u_n$, et donc $R_n = R_{n+1} + (-1)^n u_n$.

2) En itérant on a pour tout entier $k \geq 1$: $R_n = R_{n+k} + \sum_{p=n}^{n+k-1} (-1)^p u_p$. Or, $R_n = (-1)^n J_n$ et on a montré que J_n est de limite nulle. Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{n+k} = 0$ et ainsi, en faisant tendre k vers l'infini

dans la relation ci-dessus, on obtient : $R_n = \sum_{p=n}^{\infty} (-1)^p u_p = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)^2}$. Donc $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$.

3) Ainsi, $R_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+2}^{2n+2p+1} \frac{(-1)^k}{k^2}$. Or

$\sum_{k=2n+2}^{2n+2p+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\frac{1}{(2k+2)^2} - \frac{1}{(2k+3)^2} \right)$ (on a regroupé les termes 2 par 2). Ainsi, en

faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient : $R_{2n+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k+2)^2} - \frac{1}{(2k+3)^2} \right)$, et finalement :

$$R_{2n+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2}$$

4) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} \leq \frac{4k+6}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} = \frac{2}{(2k+2)^2 (2k+3)} \leq \frac{2}{(2k+2)^3}$

Et donc : $\frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} \leq \frac{1}{4(k+1)^3}$. Or la fonction $t \rightarrow \frac{1}{4t^3}$ est continue, décroissante,

et donc, par comparaison avec une intégrale on a $\frac{1}{4(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$. Donc :

$$\frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

Par ailleurs : $\frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} \geq \frac{4k+4}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} = \frac{1}{(k+1)(2k+3)^2} \geq \frac{1}{(k+2)(2k+4)^2}$

Donc $\frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} \geq \frac{1}{4(k+2)^3}$, et le même raisonnement de comparaison avec une intégrale établit :

$$\frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} \geq \int_{k+2}^{k+3} \frac{dt}{4t^3}$$

Cette inégalité n'est pas celle demandée, mais me paraît être la plus cohérente. L'inégalité de l'énoncé peut néanmoins être prouvée : en calculant l'intégrale, il s'agit de prouver que :

$$\frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} \geq \frac{1}{8} \frac{2k+3}{(k+1)^2 (k+2)^2}, \text{ ce qui équivaut à } \frac{4k+5}{(2k+3)^2} \geq \frac{1}{2} \frac{2k+3}{(k+2)^2}, \text{ qui}$$

équivaut lui-même à $2(k+2)^2(4k+5) \geq (2k+3)^3$, ce qui donne après développement : $6k^2+18k+13 \geq 0$, ce qui est bien réalisé pour tout $k \geq 0$.

5) La fonction $t \rightarrow \frac{1}{4t^3}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit en sommant :

$$\int_{n+2}^{\infty} \frac{dt}{4t^3} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{4t^3}$$

Et donc :

$$\frac{1}{8(n+2)^2} \leq R_{2n+1} \leq \frac{1}{8n^2}$$

6) Par suite : $\frac{(2n+1)^2}{8(n+2)^2} \leq (2n+1)^2 R_{2n+1} \leq \frac{(2n+1)^2}{8n^2}$, et les deux termes extrêmes tendent vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers l'infini. Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)^2 R_{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Or $(2n)^2 R_{2n} = \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^2 \left((2n+1)^2 R_{2n+1} - 1 \right)$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^2 R_{2n} = -\frac{1}{2}$.

7) Sachant que $J_n = (-1)^n R_n$, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)^2 J_{2n+1} = -\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^2 J_{2n}.$$

Il s'en suit que : $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 J_n = -\frac{1}{2}$, et donc $J_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Partie V

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. L'application $m : t \rightarrow \frac{P(t) \ln(t)}{t+1}$ est continue sur $]0, 1]$, et P est continu, donc borné par une constante K sur le segment $[0, 1]$. Donc on a sur $]0, 1]$ la majoration :

$|m(t)| \leq -K \ln(t)$ ce qui prouve l'intégrabilité de m sur $]0, 1]$. Donc $T(P)$ est bien défini.

2) T est trivialement linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$. cqfd.

3) On a alors, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$:

$$|T(P)| \leq \int_0^1 \frac{|P(t)| \ln(t) dt}{1+t} \leq \int_0^1 \frac{|\ln(t)| \sum_{k=0}^n |a_k| t^k dt}{1+t} = -\sum_{k=0}^n |a_k| J_k \leq \|P\| \sum_{k=0}^n (-J_k)$$

(toutes les intégrales écrites étant bien licites). Finalement, sachant que $-J_k \geq 0$ et que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-J_k) = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{cf partie III}), \text{ on a } \sum_{k=0}^n (-J_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-J_k), \text{ et donc : } |T(P)| \leq \frac{\pi^2}{8} \|P\|.$$

4) De la linéarité de T on en déduit, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$|T(P) - T(Q)| = |T(P - Q)| \leq \frac{\pi^2}{8} \|P - Q\|,$$

et donc T est $\frac{\pi^2}{8}$ -lipschitzienne.

5) Appelons A l'ensemble en question. D'après la question 3, A est majoré par $\frac{\pi^2}{8}$ (et clairement minoré par 0), donc A est borné, et $\sup(A) \leq \frac{\pi^2}{8}$.

Par ailleurs, en considérant le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$, on a bien $\|P_n\| = 1$, et $|T(P_n)| = \sum_{k=0}^n (-J_k)$, ce qui assure $\sum_{k=0}^n (-J_k) \in A$. Donc $\sum_{k=0}^n (-J_k) \leq \sup(A) \leq \frac{\pi^2}{8}$ et, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\sup(A) = \frac{\pi^2}{8}$.