

تمرینات مربوط به صدق و باطل (از کتاب - سیورس) ص ۱

۱- به کمک آزمون صدق و باطل زیر را ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2} \quad -1-1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty \quad -1-2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty \quad -1-3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = 10/1 \quad -1-4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2x}{x-3} = -\infty \quad -1-5$$

۲

۲- عدد زیر را بدین قاعده هوسپیتال بدست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x} \quad - ۲-۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x + \sec x) \quad - ۲-۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \quad - ۲-۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)} \quad - ۲-۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2 + 1 \cdot x - 34}{x - 3}} \quad - ۲-۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \quad - ۲-۶$$

$$(m, n \in \mathbb{N}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad - ۲-۷$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1} \quad - ۲-۸$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} (1 - x^{\frac{1}{3}}) \quad - ۲-۹$$

rw

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$$

- 1-1,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^r}{x}$$

- 1-11

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ of } \frac{1}{x}$$

- 1-12

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^r - x + 1})$$

- 1-13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x^r + 1} - x^r)$$

- 1-14

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$$

- 1-15

$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{r - \sqrt{x}}{r - \sqrt{rx + 1}}$$

- 1-16

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sin x}$$

- 1-17

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$$

1-18

50

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^r \cdot (2x+1)^r}{(2x+1)^{2r}}$$

- 2-19

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^r x} - \frac{1}{r \sin^r \left(\frac{x}{r} \right)} \right)$$

- 2-20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})$$

- 2-21

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})$$

- 2-22

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x+\sqrt{x}})$$

- 2-23

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

- 2-24

$$(n \in \mathbb{N}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$$

- 2-25

$$(n \in \mathbb{N}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^r + \dots + x^n - n}{x-1}$$

- 2-26

$$(n, m \in \mathbb{N}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^r}$$

- 2-27

$$(n \in \mathbb{N}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^r}$$

- 2-28

$$\frac{20}{(n, m \in \mathbb{N})} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad (-K-29)$$

$$(n, m \in \mathbb{N}) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^m + 1}{x^n + 1} \quad (-K-30)$$

۴

تمرین در خصوص توابع پیوسته :

۱- قضیه تنگه ثابت : هرگاه $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ تابع پیوسته باشد، آنگاه $c \in [a, b]$ هست که $f(c) = c$.

۲- هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$.

عکس این مطلب وقتی برقرار است که $L = 0$. به عبارتی :

اگر $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

۳- با ارائه مثال مشخص کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ آنگاه

ضرورتاً رابط $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ برقرار نیست.

۴- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع با خصوصیات زیر باشد :

(الف) f در $x=0$ پیوسته است.

(ب) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

آنگاه f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۵- هرگاه f در a پیوسته، $f(a) > 0$ ، آنگاه $\exists \delta > 0$ ای هست که

$$\forall x \quad (|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0)$$

✓

۲- فرض کنید f در $[0, 1]$ تابع پیوسته باشد. داریم:

$$a \in [0, \frac{1}{2}] \text{ هـ} \text{، } f(a) = f(a + \frac{1}{2})$$

$$f(0) = f(1) \text{ (سوال کت - آسان)}$$