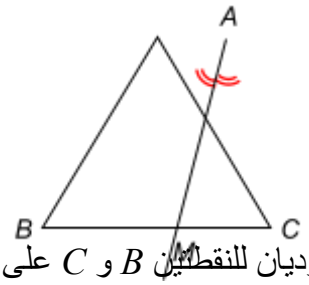
الهدف من هذه المسألة هو برهان خاصية للمنصف الداخلي لزاوية في مثلث بعدة طرائق.

ABC مثلث كيفي ، $(AM]$ منصف زاوية الرأس A يقطع $[BC]$ في النقطة M. بين أن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

طريقة 1 : باستعمال مبرهنة طاليس

أرسم المستقيم الموازي لـ (AB) الذي يشمل النقطة C و يقطع (AM) في A'.

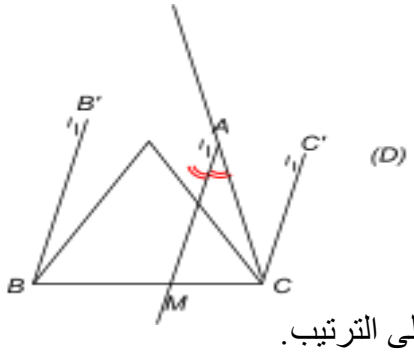


1) ما نوع المثلث $AA'C$ ؟

2) استنتج أن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

طريقة 2 : باستعمال تشابه المثلثات

أرسم المستقيم (D) العمودي على (AM) الذي يشمل A ، علم B' و C' المسقطان العموديان للنقطتين B و C على (D) على الترتيب.



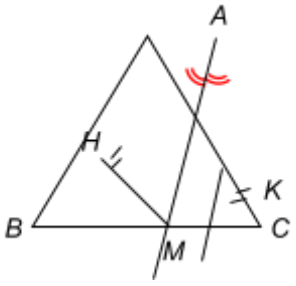
1) بين لماذا $\frac{MB}{MC}=\frac{AB'}{AC'}$ ؟

2) بين أن المثلثين ABB' و ACC' متشابهان.

3) استنتج أن $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

طريقة 3 : باستعمال المساحات

علم النقطتين K و H المسقطان العموديان للنقطة M على (AB) و (AC) على الترتيب.



1) بين لماذا $MH = MK$ ؟

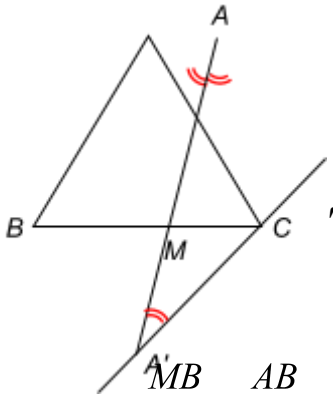
2) عبر عن مساحة المثلث ABM باعتبار $[AB]$ كقاعدة ، ثم باعتبار $[BM]$ كقاعدة . كرر العملية مع المثلث ACM.

3) استنتج أن $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$.

الحل :

طريقة 1 : باستعمال مبرهنة طاليس

أرسم المستقيم الموازي لـ (AB) الذي يشمل النقطة C و يقطع (AM) في A'.



1) نوع المثلث $AA'C$:

$B\hat{A}A' = A\hat{A}'C$ متبادلتان داخليا و $B\hat{A}A' = A'\hat{A}C$ من الفرضيات

إذن : $A'\hat{A}C = A\hat{A}'C$ ومنه المثلث $AA'C$ متساوي الساقين إذن : $CA = CA'$

2) استنتج أن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$:

لدينا $(AB) // (A'C)$ ومنه حسب مبرهنة طاليس : $\frac{MB}{MC}=\frac{MA}{MA'}=\frac{AB}{CA'}$ ومنه : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{CA'}$

بما أن : $CA = CA'$ فإن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

طريقة 2 : باستعمال تشابه المثلثات

أرسم المستقيم (D) العمودي على (AM) الذي يشمل A ، علم B' و C' المسقطان العموديان للنقطتين B و C على (D) على الترتيب.

1) بين لماذا $\frac{MB}{MC}=\frac{AB'}{AC'}$.

(D) و (BC) يتقاطعان في النقطة O. لدينا (BB') و (AM) و (CC') مستقيمات متوازية.

نطبق مبرهنة طاليس : $\frac{OC'}{OA}=\frac{OC}{OM}$ و $\frac{OA}{OB'}=\frac{OM}{OB}$ يعني : $\frac{OC'}{OC}=\frac{OA}{OM}$ و $\frac{OA}{OM}=\frac{OB'}{OB}$

$\frac{OC'}{OC}=\frac{OA}{OM}=\frac{OA-OC'}{OM-OC}=\frac{AC'}{MC}$ و $\frac{OA}{OM}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OB'-OA}{OB-OM}=\frac{AB'}{MB}$

وبالتالي : $\frac{AC'}{MC}=\frac{AB'}{MB}$ يعني : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB'}{AC'}$.

2) بين أن المثلثين ABB' و ACC' متشابهان.

لدينا : $\hat{BB'A}=\hat{AC'C}=90°$

ولدينا : $\hat{B'BA}=\hat{BAM}$ و $\hat{BAM}=\hat{MAC}$ و $\hat{MAC}=\hat{ACC'}$ بالتبادل الداخلي و المعطيات

إذن : $\hat{B'BA}=\hat{ACC'}$

ولدينا : $\hat{B'AB}=90°-\hat{B'BA}$ و $\hat{C'AC}=90°-\hat{ACC'}$ إذن : $\hat{B'AB}=\hat{C'AC}$

ومنه المثلثان ABB' و ACC' متشابهان.

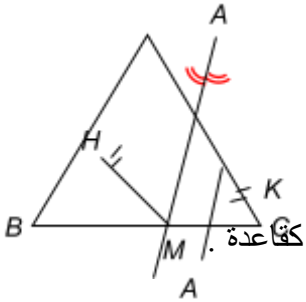
3) استنتج أن $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

من السؤال أ) لدينا : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB'}{AC'}$

من السؤال ب) نستنتج : $\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB}{AC}=\frac{BB'}{CC'}$

إذن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$.

طريقة 3 : باستعمال المساحات



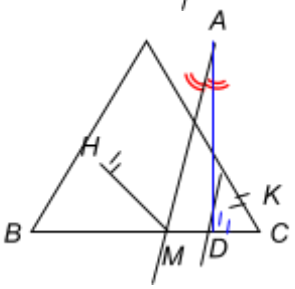
علم النقطتين K و H المسقطان العموديان للنقطة M على (AB) و (AC) على الترتيب.

1) بين لماذا $MH=MK$ ؟

نقارن بين المثلثين القائمين AMH و AMK لهما $[AM]$ وتر مشترك

و $\hat{HAM}=\hat{MAK}$ وبالتالي المثلثان متقايسان إذن $MH=MK$

2) عبر عن مساحة المثلث ABM باعتبار $[AB]$ كقاعدة ، ثم باعتبار $[BM]$ كقاعدة .



$s(ABM)=\frac{1}{2}AB\times HM$ و $s(ABM)=\frac{1}{2}BM\times AD$

كرر العملية مع المثلث ACM.

$s(ACM)=\frac{1}{2}AC\times KM$ و $s(ACM)=\frac{1}{2}CM\times AD$

3) استنتج أن $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$.

من السؤال السابق نستنتج أن : $BM \times AD = AB \times HM$ و $CM \times AD = AC \times KM$

ومنه : $\frac{BM \times AD}{CM \times AD}=\frac{AB \times HM}{AC \times KM}$ بما أن : $MH = MK$ فإن : $\frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC}$ أي : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$