

**Відділ освіти Віньковецької
райдержадміністрації**

**Інформаційно-методичний центр
Подільської ЗОШ І-ІІ ступенів**

**Гвоздовський І.М.,
вчитель математики
Подільської ЗОШ
І-ІІ ступенів**

-2009-

НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ В 5-9 КЛАСАХ

Уклав: Гвоздовський І.М. – Подолянське.
2009 – 67с.

Рецензент:

Троян Н.М. – директор Подолянської ЗОШ
I-II ступенів

Посібник призначений для вчителів математики і фізики та учнів 5-9 класів. Він містить теоретичні основи наближених обчислень і приклади їх практичного застосування.

Головне завдання цього посібника – допомогти вчителю і учням розумно організувати навчальну діяльність, забезпечити її ефективність.

ПЕРЕДМОВА

В посібнику розглядається методика викладання 5-9 класах важливих питань, пов'язаних з наближеними обчисленнями. Надаються поради з організації вивчення правил округлення чисел, введення понять абсолютної і відносної похибки, точності наближення, правильної і значущої цифри, відносно оцінки похибки результатів дій з наближеними числами.

У розділі I посібника розглянуто деякі теоретичні основи наближених обчислень, які мають місце в курсах математики і фізики. Наведено приклади та задачі з розв'язками й

детальним поясненням застосування теоретичних положень.

Розділ II присвячено застосуванню наближених обчислень при виконанні лабораторних робіт з фізики.

Розділ I.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

НАБЛИЖЕНІ ЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИН

Усяке обчислення полягає в тому, що ми, маючи деякі *дані* числа, знаходимо за їх допомогою деякі інші, шукані числа, причому результати дістаємо, виконуючи *лічбу*, вимірювання або різні арифметичні операції.

Перелічуючи предмети, іноді ми знаходимо число їх цілком точно, а іноді — лише наближено. Наприклад, полічити, скільки у кошику яблук або скільки учнів у класі, завжди можна цілком *точно*, а от число дерев у деякому місті здебільшого знаходимо тільки *наближено*.

Що ж до вимірювань, то їх завжди виконують лише наближено. Наприклад, вимірявши довжину і ширину прямокутника лінійкою з поділками на сантиметри і міліметри, ми встановлюємо, що ця довжина наближено дорівнює, припустимо, 57,3 см, а ширина наближено ж дорівнює 35,8 см. Тут ми знайшли довжину і ширину прямокутника з точністю до десятих частин сантиметра або до міліметра. Інакше кажучи, знайшли цілі сантиметри і десяті частини сантиметра, тобто міліметри, соті ж частини сантиметра, так само як

і тисячні, десятитисячні і т. д. частини сантиметра залишилися невідомими.

Виконуючи обчислення з наближеними даними, ми дістаємо, звичайно, тільки наближені значення шуканих величин. Ці знайдені наближені значення можуть, у спою чергу, бути даними в інших задачах. Отже, величезна більшість даних у різного роду задачах — числа наближені. Точні дані зустрічаються набагато рідше.

Зауважимо, що, маючи багатоцифрові числа, точні або наближені, ми часто змушені буваємо *округлювати* їх, тобто відкидати одну або кілька останніх цифр. Нагадаємо правило округлення.

Округлюючи ціле число до деякого розряду, всі його цифри справа від цього розряду замінюють нулями; округлюючи десятковий дріб до деякого

розряду, відкидають усі його десяткові знаки після даного розряду.

В обох випадках:

1) якщо перша з цифр (зліва), що відкидається, менша за 5, то останню залишену цифру не змінюють;

2) якщо перша цифра, що відкидається, більша за 5 або дорівнює 5, то останню залишену цифру збільшують і на одиницю.

Якщо після округлення дістають число, менше від округлюваного, то таке округлення називають округленням з нестачею, а якщо більше, то округленням з надлишком.

Наприклад, $1024 \approx 1000$ (з нестачею);
 $46,87 \approx 46,9$ (з надлишком); $0,4563 \approx 0,5$ (з надлишком).

Примітка. Фактично всі рівності в обчисленнях з наближеними даними мають наближений характер. Проте для зручності знак наближеної рівності ($\approx$) будемо вживати лише в тих випадках, коли виконуватимемо округлення. У тих же випадках, коли дія виконується формально точно, вживатимемо (умовно) знак строгої рівності ($=$).

ПОХИБКИ НАБЛИЖЕНИХ ЗНАЧЕНЬ ВЕЛИЧИН

Абсолютна похибка. Межа абсолютної похибки

Наближені значення величин можуть бути знайдені з різною точністю.

Кількісною характеристикою точності наближеного значення величини є *похибка*.

Нехай x — точне значення деякої величини;
 a — її наближене значення, тоді похибка подається

рівністю $x-a=\Delta_a$. Похибка Δ_a додатна, якщо $a<x$, і від'ємна, якщо $a>x$.

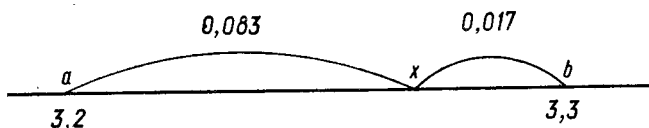
Поняття похибки наближеного значення величини добре ілюструють приклади на округлення чисел.

Справді, округлюємо число 2,817 до десятих. Дістанемо $2,817 \approx 2,8$.

Отже, маємо: $x=2,817$; $a=2,8$;
 $x-a=2,817-2,8=0,017$, тобто $\Delta_a=0,017$. (Похибка наближення з нестачею завжди додатна, а похибка з надлишком — від'ємна.)

Зауважимо, проте, що на практиці знак похибки часто буває неістотним. Тому вводять поняття абсолютної похибки: $|x-a|=|\Delta_a|$. Наприклад, замінюючи число $x=3,283$ наближеним значенням $a=3,2$ (з нестачею), дістаємо абсолютну похибку $|x-a|=|\Delta_a|=|0,083|$, а замінюючи це число

наближеним значенням $b=3,3$ (з надлишком), дістаємо абсолютну похибку $|x-b|=|\Delta_a|=|-0,017|$. Отже, наближення $3,3$ краще за наближення $3,2$. Якщо на числовій прямій зобразити точки з координатами x , a , b , то відстань між точками з координатами x та b менша за відстань між точками з координатами x та a (мал. 1). З'ясуємо, яке з двох наближень $0,83$ чи $0,84$ числа $5/6$ є кращим. Обчислимо абсолютні похибки: $|5/6 - 0,83| = |1/300|$; $|5/6 - 0,84| = |-1/150|$.



Мал. 1

Оскільки $|1/300| < |-1/150|$, то перше наближення краще за друге.

У практичних задачах точне значення тієї чи іншої величини часто буває невідомим, тобто не

можна знайти похибку деякого наближення чи її модуль. У таких випадках знаходять два числа: c — наближення з недостачею та b — наближення з надлишком, між якими знаходиться точне значення розглядуваної величини x : $c < x < b$.

Знаючи наближення з недостачею і наближення з надлишком деякої шуканої величини x , можемо за її наближене значення взяти число c , b чи будь-яке число a , що задовольняє нерівність $c < a < b$. Модуль похибки будь-якого з цих наближень не перевищує різниці $b - c$. Отже, не знаючи модуля деякого наближення a числа x , ми все ж зможемо його оцінити зверху, тобто вказати таке число h_a , що $|\Delta_a| \leq h_a$. Це число називають *межею абсолютної похибки наближення a числа x* . На практиці межу абсолютної похибки намагаються знайти якомога меншу.

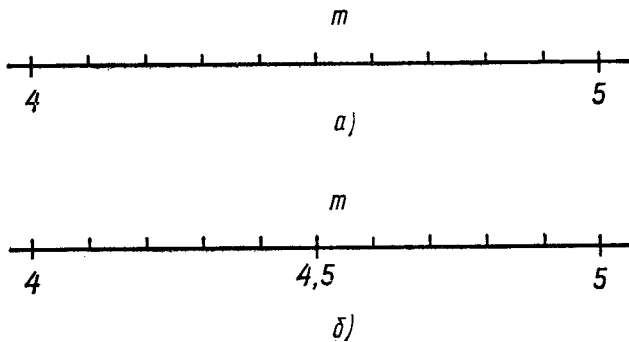
Якщо відоме точне значення x величини і відоме наближене значення a , то межею похибки вважають саму абсолютну похибку, тобто покладають $h_a = |x - a| = |\Delta_a|$; $h_a = |\Delta_a|$.

Нехай, наприклад, $x = 5,8761$, $a = 5,9$, тоді $|x - a| = |5,8761 - 5,9| = |-0,0239|$, тобто $h_a = 0,0239$, $h_a = |\Delta_a| = 0,0239$.

Примітка. На практиці значення h_a беруть з однією або двома значущими цифрами, причому округлення виконують тільки з надлишком. Так, у розглянутому вище прикладі можна було б покласти $h_a = 0,03$.

Розглянемо такий приклад. Відомо, що маса m металевої пластинки в грамах перебуває в межах $4 \leq m \leq 5$. Наближеним її значенням може бути число 5, 4, а також будь-яке інше число між ними. Візьмемо за наближене значення маси число 4. Не знаючи точного значення маси m ми не можемо

визначити похибку наближення. Проте легко побачити, що абсолютна похибка не перевищує 1г (мал. 2, а). У такому разі говорять,



Мал. 2

що число 4 є *наближеним значенням маси в грамах з точністю до одиниці*: $|m-4| \leq 1$.

Візьмемо тепер за наближене значення маси m у грамах середнє арифметичне даних меж, тобто число 4,5. Легко переконатися, що $|m-4,5|$ не

перевищує половини відстані між точками з координатами 4 і 5, тобто $|m-4,5| \leq 0,5$ (мал. 2, б).

У такому разі говорять, що число 4,5 є *наближеним значенням маси пластинки в грамах з точністю до 0,5*. Це наближення краще за попереднє, оскільки межа абсолютної похибки тут менша.

Число a називають *наближенням до числа x з точністю до h_a* , якщо виконується нерівність $|x-a| \leq h_a$.

Отже, межа абсолютної похибки y задає точність даного вимірювання або обчислення, тобто можна сформулювати таке означення:

Число a називають *наближенням до числа x з точністю до h_a* , якщо межа абсолютної похибки цього наближення дорівнює h_a . Чим більша точність, тим менша величина h_a і навпаки.

Таким чином, точність одного й того самого вимірювання чи обчислення характеризують записи: $x=a \pm h_a$; $|x-a| \leq h_a$; $a-h_a \leq x \leq a+h_a$. Усі три форми запису рівносильні, причому знак рівності в першому випадку має дещо умовний характер: запис $x=a \pm h_a$ означає, що наближення a відрізняється від x не більш як на h_a .

Приклади

1. Округлити числа:

а) 0,8; 7,6; 19,3; 568,58 — до одиниць;

б) 17,26; 15,025; 8,654 — до десятих;

в) 7,238; 12,0098; 8,054 — до сотих.

Обчислити абсолютну похибку.

Розв'язання.

а) $568,58 \approx 569$; $|568,58 - 569| = |-0,42| = 0,42$; $|\Delta_a| = 0,42$;

б) $15,025 \approx 15,0$; $|15,025 - 15,0| = |0,025| = 0,025$; $|\Delta_a| = 0,025$.

2. Подати число у вигляді десяткового дробу й округлити цей дріб до десятих; до сотих; до тисячних. У кожному випадку знайти абсолютну похибку наближеного значення, якщо:

а) $x=1/3$; б) $x=1/6$; в) $x=1/9$; г) $x=1/11$.

Розв'язання.

а) $x=1/3 \approx 0,3$; $|\Delta_a| = |1/3 - 0,3| = 1/30$;

б) $x=1/3 \approx 0,33$; $|\Delta_a| = |1/3 - 0,33| = 1/300$;

в) $x=1/3 \approx 0,333$; $|\Delta_a| = |1/3 - 0,333| = 1/3000$;

3. Межа абсолютної похибки наближеного значення 385 числа x дорівнює 0,5. У яких межах знаходиться число x ? ($384,5 < x < 385,5$.)

4. Знайти межу абсолютної похибки наближеного значення x , якщо $47 < x < 48$. ($\Delta_a = (48 - 47)/2 = 0,5$.)

5. За допомогою амперметра, точність якого становить 0,02А, виміряли силу струму й дістали 10,43А. Знайти межі зміни цієї величини струму. ($10,41\text{А} < 10,43\text{А} < 10,45\text{А}$.)

6. Площа квадрата дорівнює $27,5 \pm 0,3\text{см}^2$. Знайти межі зміни площі квадрата. ($27,2\text{см}^2 < S < 27,8\text{см}^2$.)

7. Яке з наближень краще:

а) 0,16 чи 0,17 для числа $1/6$;

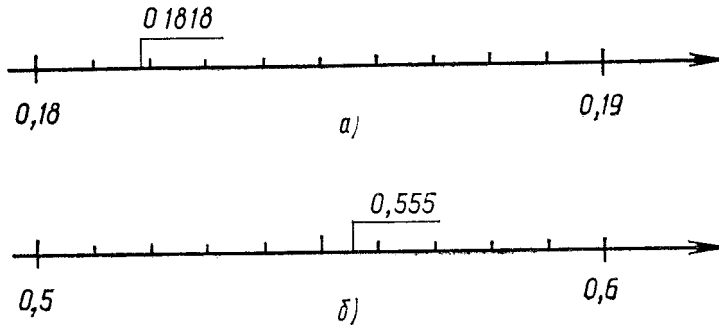
б) 0,18 чи 0,19 для числа $2/11$;

в) 0,55 чи 0,56 для числа $5/9$;

г) 3,141; 3,142; $3-\square$ и 3,1408 для числа $\pi=3,14159\dots$?

Розв'язання.

а) $1/6=0,1666\dots$; $|0,167-0,16|=0,007$; $|0,167-0,17|=0,003$;



Мал. 3

наближення 0,17 краще, ніж 0,16 ($0,003 < 0,007$).

б) перше наближення; справді, $2/11 \approx 0,1818$ (мал. 3, а);

в) друге наближення, оскільки $5/9 \approx 0,5555$ (мал. 3, б);

г) $|3,14159-3,141|=0,00059$; $|3,14159-3,142|=0,00041$; $3-\square$
 $\approx 3,1429$; $|3,14159-3,1429|=0,00131$; $|3,14159-3,1408|=0,00079$.

Остаточню маємо: $0,00121 > 0,00079 > 0,00059 > 0,00041$.

Отже, найкращим з поданих наближень числа π є 3,142.

Відносна похибка. Межа відносної похибки

Якщо є кілька наближених значень однієї і тієї самої величини разом з відповідними межами абсолютних похибок, то чим менші ці межі, тим точнішими є відповідні наближені значення. Припустимо, наприклад, що, одного разу дістали для довжини відрізка значення 264 ± 8 см, а другого— значення 264 ± 1 см. Зрозуміло, що другий результат набагато точніший, ніж перший. Таким чином, межа абсолютної похибки є зручним засобом для порівняння точності кількох значень однієї й тієї самої величини.

Проте для порівняння точності наближених значень *різних величин* межа абсолютної похибки буде недостатня. Нехай, наприклад, виміряно довжину олівця, причому в результаті дістали 20 ± 1 см, і довжину фасаду будинку, причому в

результаті дістали 1000 ± 1 см. Межі абсолютних похибок в обох випадках однакові й дорівнюють 1 см. Але відразу очевидно, що перше вимірювання виконано дуже грубо, а друге — досить точно.

Для порівняння точності наближених значень *різних величин* користуються *відносною похибкою*, яка дорівнює частці від ділення абсолютної похибки на саме наближене значення:

$$\frac{|x-a|}{|a|}$$

Виражають відносну похибку в процентах, Наприклад, якщо в результаті вимірювання з'ясувалося, що відстань між двома пунктами більша за 12,3 км, але менша від 12,7 км, то ця відстань $d = 12,5 \pm 0,2$ км. Відносна похибка такого вимірювання не перевищує $0,2:12,5$; $\omega = 1,6\%$.

Говорять також, що дана відстань виміряна з точністю до 1,6%.

Відносну похибку, як і абсолютну, не завжди можна точно визначити. Тому на практиці здебільшого використовують межу відносної похибки ε , тобто величину, що задовольняє нерівність

$$|\omega| \leq \varepsilon_a.$$

Очевидно, можна вважати, що $\varepsilon_a = h_a / |a|$.

Так, у розглянутому вище прикладі з вимірюванням олівця та фасаду будинку маємо: межа відносної похибки при вимірюванні олівця дорівнює 1/20, або 5%, а при вимірюванні довжини фасаду 1/1000? або 0,1%. Отже, друге вимірювання виконано в 50 раз точніше, ніж перше.

Цифра якого-небудь розряду в запису наближеного значення числа називається *правильною*, якщо абсолютна похибка наближення не перевищує одиниці цього розряду.

Нехай $x=825,34\pm 0,5$. Порівняємо розрядні одиниці даного числа, з межею абсолютної похибки цього числа (яка дорівнює 0,5). Нерівність $0,5 < 100$ правильна, отже, цифра 8 — правильна; нерівність $0,5 < 1$ правильна, отже, цифра 2 — правильна; нерівність $0,5 < 1$ також правильна, отже, цифра 5 — правильна, а от нерівність $0,5 < 0,1$ неправильна. Отже, в даному прикладі правильними є цифри 8; 2; 5.

Якщо $x = 825,34 \pm 0,1$, то виконаємо знову порівняння розрядних одиниць з межею абсолютної похибки дістанемо: $0,1 < 100$; $0,1 < 10$; $0,1 < 1$; $0,1 = 0,1$. Отже, цифра 3 також правильна.

Примітка. Інколи цифру α того чи іншого розряду називають правильною, якщо межа абсолютної похибки не перевищує половини одиниці цього розряду.

Згідно з таким означенням, цифру α називають правильною у *вузькому розумінні*, а згідно з першим — правильною у *широкому розумінні*.

Надалі користуватимемося поняттям правильної цифри числа в широкому розумінні.

Цифру числа, яка стоїть за правильними цифрами, називають *сумнівною*. Усі цифри числа, які стоять після правильної і однієї сумнівної, називають *неправильними*. Наприклад, в числі $184,36 \pm 2$ цифри 1 і 8 — правильні, цифра 4 — сумнівна, а наступні — 3 і 6 — неправильні. Сумнівну цифру підкреслюватимемо рисою.

Наближені значення прийнято записувати так, щоб усі цифри у запису були правильними. Іншими словами: якщо в запису наближеного

значення не вказано абсолютної похибки, то це означає, що вона не перевищує одиниці останнього розряду. Щоб досягти цього, наближені значення подають часто в *стандартному вигляді*: $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ (n — ціле число) і всі цифри числа a правильні. Наприклад, наближені значення, наведені в двох останніх прикладах, можна записати так: $x \approx 8,25 \cdot 10^2$; $x \approx 8,253 \cdot 10^2$; $x \approx 1,84 \cdot 10^2$.

Значущими цифрами числа називають усі правильні цифри в його запису, крім нулів, що стоять зліва від першої відмінної від нуля цифри. Наприклад, у запису $x = 0,00002068$ чотири перших нулі не є значущими цифрами, а всі наступні цифри (2, 0, 6 і 8) — значущі.

Зауважимо, що поняття правильної цифри числа важко сприймається учнями. Тому доцільно

запропонувати їм систему вправ, які допоможуть засвоїти цей матеріал і свідомо використовувати його на практиці.

Розглядаємо послідовно такі випадки:

1. Межа абсолютної похибки наближеного значення числа виражається числом 10^{-n} , наприклад: $5,347 \pm 0,01$; $42,2356 \pm 0,001$.

2. Межа абсолютної похибки наближеного значення виражається числом, яке має одну значущу цифру відмінну від одиниці, наприклад: $2,1436 \pm 0,0005$; $405,34 \pm 0,02$.

3. Межа абсолютної похибки наближеного значення виражається числом з кількома значущими цифрами, наприклад: $2,374 \pm 0,015$; 3754 ± 25 .

Наведемо приклади вправ кожного виду.

1. Для визначення правильних цифр,

підписують межу точності під наближеним значенням (розряд під розрядом)

5,847	42,2356
0,01	0,001

Тоді в запису числа усі цифри, які стоять над цифрою 1 і зліва від неї, правильні.

Для наочності правильні цифри числа можна відділити вертикальною рисою:

<u>цифри правильні</u>	<u>цифри правильні</u>
5,84 7	42,235 6
0,01	0,001

2. Якщо в запису межі точності перша зліва значуща цифра відмінна від одиниці, то всі цифри наближення, які стоять вліво від розряду, у якому записана цифра α , правильні. Наприклад, $2,1436 \pm 0,0005$; у наближенні 2,1436 правильними є перші чотири цифри. Можна записати:

<u>цифри правильні</u>	<u>цифри правильні</u>
------------------------	------------------------

2,143 6	405,3 4
0,000 5	0,0
2	

3. Аналогічно діємо й у випадку, коли межа точності виражається числом з кількома значущими цифрами:

2,3746±0,015;	3754±25
<u>цифри правильні</u>	<u>цифри правильні</u>
2,3 74	37 54
0,0	15
25	

Згодом, коли учні засвоять правило визначення правильних цифр, вони не вдаються до таких записів, а виконують ці вправи усно.

Приклади

1. Знайти точність наближеного значення a , якщо a дорівнює:

а) $2,6 \cdot 10^3$; б) $9,12 \cdot 10^2$; в) $5,20 \cdot 10^3$; г) $1,7 \cdot 10^5$.

Розв'язання.

- а) $2,6 \cdot 10^3 \pm 0,1 \cdot 10^3$; $h=10^2$;
 б) $9,12 \cdot 10^2 \pm 0,01 \cdot 10^2$; $h=1$;
 в) $5,20 \cdot 10^3 \pm 0,01 \cdot 10^3$; $h=10$;
 г) $1,7 \cdot 10^{-5} \pm 0,1 \cdot 10^{-5}$; $h=10^{-6}$.

2. Оцінити відносну похибку наближеного значення $8,330 \cdot 10^4$, коли відомо, що в запису 8,330 усі цифри правильні.

Розв'язання.

Оскільки в запису 8,330 цифри правильні, то абсолютна похибка наближеного значення $8,330 \cdot 10^4$ не перевищує $0,001 \cdot 10^4$.

Отже, $h=0,001 \cdot 10^4$; $\varepsilon=h/|a|=(0,001 \cdot 10^4)/(8,330 \cdot 10^4)=1/8330=$
 $=0,00012004\dots$; $\varepsilon=0,013\%$.

Відносну похибку округлюємо з надлишком.

3. Оцінити відносну похибку наближеного значення l . Яке з вимірювань точніше, коли:

$$l_1=0,125 \pm 0,032;$$

$$l_2=76,5 \pm 0,4;$$

$$l_3=3,24 \pm 0,81.$$

Розв'язання.

$$l_1=0,125 \pm 0,032; \varepsilon_{l_1}=h_1/|a_1|=0,032/0,125=0,256; \varepsilon_l=26\%;$$

$$l_2 = 76,5 \pm 0,4; \varepsilon_2 = h_2 / |a_2| = 0,4 / 76,5 = 0,005228 \dots; \varepsilon_2 = 0,53\%;$$

$$l_3 = 3,24 \pm 0,81; \varepsilon_3 = h_3 / |a_3| = 0,81 / 3,24 = 0,25; \varepsilon_3 = 25\%.$$

Точніше виміряно l_2 .

4. Оцінити відносну похибку наближених значень, якщо всі записані цифри правильні:

$$a) 5,1 \cdot 10^7; б) 6,3 \cdot 10^{-2}; в) 1,02 \cdot 10^4.$$

Розв'язання.

$$a) x_I = 5,1 \cdot 10^7 \pm 0,1 \cdot 10^7; \varepsilon_I = (0,1 \cdot 10^7) / (5,1 \cdot 10^7) = 1/51 = 0,0196 \dots; \\ \varepsilon_I = 2\%;$$

5. Вольтметром виміряли напругу й дістали: $243 \pm 0,5\text{В}$. Довести, що відносна похибка не перевищує $0,3\%$.

Розв'язання.

$$\varepsilon = h / |a| = 0,5 / 243 = 0,002057 \dots; \varepsilon = 0,21\%; 0,21\% < 0,3\%.$$

6. Число. $53,6$ є наближеним значенням числа x . Відносна похибка менша від $0,3\%$. З якою точністю подано наближене значення?

Розв'язання.

$$x = 53,6 \pm h; \varepsilon = h / |a| \leq 0,003; h \leq 53,6 \cdot 0,003 = 0,1608 \approx 0,17; h = 0,17.$$

НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ ЗА МЕТОДОМ МЕЖ

Розглянемо тепер, питання про те, як провести строге врахування похибок у результатах обчислень з наближеними числами. Таке строге врахування похибок досягається тим, що *всі обчислення виконуються двічі*: перший раз з таким розрахунком, щоб дістати число, яке напевне менше від шуканого, тобто *нижню межу* (НМ) цього шуканого; другий раз так, щоб дістати число, яке, напевне, більше від шуканого, тобто його *верхню межу* (ВМ).

Виконуючи обчислення з наближеними даними, результат дістаємо теж наближений, причому він залежать як від похибок вихідних даних, так і «обчислювальних похибок»,

обумовлених необхідними округленнями в процесі обчислень. Постає запитання: як оцінити точність результату дій з наближеними вихідними даними при обчисленні за методом меж?

Оцінюючи результати виконання дій за методом меж, використовуємо теореми про почленне додавання, віднімання, множення та ділення числових нерівностей, а саме:

- 1) Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$;
- 2) якщо $a > b$ і $c < d$, то $a - c > b - d$;
- 3) якщо $a > b$ і $c > d$, то $ac > bd$;
- 4) якщо $a > b$ і $c > d$, то $a/d > b/c$,

причому в двох останніх випадках a , b , c , d — додатні числа.

Правила знаходження меж результатів дій можна скорочено записати в такому вигляді:

$$HM(x+y)=HMx+HMy, BM(x+y)=BMx+BMy;$$

$$HM(x-y)=HMx-BMy, BM(x-y)=BMx-HMy;$$

$$HM(x \cdot y)=HMx \cdot HMy, BM(x \cdot y)=BMx \cdot BMy;$$

$$HM(x/y)=(HMx)/(BMy), BM(x/y)=(BMx)/(HMy).$$

Формулюються ці правила так:

Нижня межа суми дорівнює сумі нижніх меж доданків; верхня межа суми дорівнює сумі верхніх меж доданків:

$$\begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \\ \hline a+c < x+y < b+d \end{array}$$

Нижня межа різниці дорівнює різниці нижньої межі зменшуваного і верхньої межі від'ємника; верхня межа різниці дорівнює різниці верхньої межі зменшуваного і нижньої межі від'ємника:

$$a < x < b$$

$$\frac{c < y < d}{a-d < x-y < b-c}$$

Нижня межа добутку дорівнює добутку нижніх меж множників; верхня межа добутку дорівнює добутку верхніх меж множників:

$$\begin{array}{l} a < x < b \quad (a > 0, b > 0, c > 0, d > 0,). \\ \parallel \qquad \parallel \\ c < y < d \\ \hline ac < xy < bd \end{array}$$

Нижня межа частки дорівнює частці від ділення нижньої межі діленого на верхню межу дільника; верхня межа частки дорівнює частці від ділення верхньої межі діленого на нижню межу дільника:

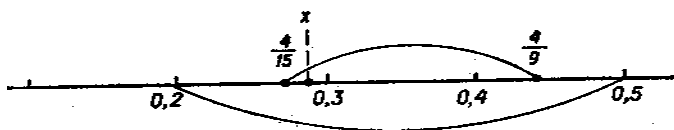
$$\begin{array}{l} a < x < b \\ \qquad \qquad \qquad \boxed{} \\ c < y < d \\ \hline a/d < x/y < b/c \end{array}$$

Слід звернути увагу на те, що *при округленні нижню межу беремо лише з недостатчею, а верхню — лише з надлишком.*

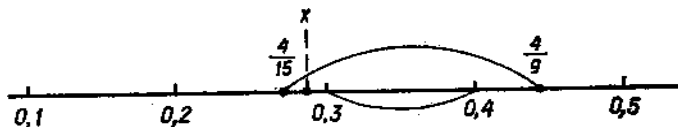
Нехай, наприклад, відомо, що x належить проміжку $4/15 < x < 4/9$

Подамо ці межі десятковими дробами:

$$4/15 = 0,266...; 4/9 = 0,444....$$



a)



б)

Мал. 4

За межі можна взяти десяткові дробі 0,2 і 0,5. Отже, маємо: $0,2 < x < 0,6$. Цим самим ми розширили проміжок, якому належить число x (мал. 4, а).

Коли б ми обчислили межі за правилом округлення чисел, то дістали б нижню межу 0,3, а верхню межу — 0,4. Тоді справжнє значення величини x могло опинитися поза проміжком (0,3; 0,4) (мал. 4, б).

У зв'язку із застосуванням методу меж виникає запитання: до якого розряду округлювати межі? Як правило, округлюють до того розряду, з якого починається розходження цифр однакових розрядів у запису меж. Якщо виконувана дія є проміжною, то межі результату завжди округлюють із збереженням однієї або двох

запасних цифр. У відповіді залишаємо лише правильні цифри числа або ще одну (сумнівну). Правильні цифри знаходимо за межею абсолютної похибки.

Приклади

1. Оцінити значення добутку xy , знаючи межі множників.

Нехай

$$2,48 < x < 2,49$$

$$3,03 < y < 3,04$$

тоді:

$$7,5144 < xy < 7,5696$$

Розв'язання.

Межі 7,5144 і 7,5696 відрізняються між собою вже цифрами сотих. Цифри в розрядах тисячних уже не впливають на точність меж. Тому записуємо межу з точністю до сотих: $7,51 < xy < 7,57$. Обчислюємо наближене значення добутку та межу абсолютної похибки

$$xy = (7,57 + 7,51)/2 \pm (7,57 - 7,51)/2; xy = 7,54 \pm 0,03.$$

Знайдена межа абсолютної похибки (0,03) означає, що в наближеному значенні (7,54) правильні лише цифри 7 і 5. У

відповіді можна залишити лише правильні цифри або ще одну (сумнівну):

$$xy=7,5\pm0,03 \text{ або } xy=7,54\pm0,03.$$

2. Обчислити $S=x/z+yz$, якщо

$$3,25 < x < 3,26;$$

$$6,13 < y < 6,14;$$

$$2,51 < z < 2,52,$$

Розв'язання.

1) Оцінимо частку x/z :

$$3,25/2,52 < x/z < 3,26/2,51; 1,2896... < x/z < 1,2988...$$

$$1,289 < x/z < 1,299.$$

2) Оцінимо добуток:

$$6,13 \cdot 2,51 < yz < 6,14 \cdot 2,52; 15,386... < yz < 15,472...$$

$$15,38 < yz < 15,48.$$

3) Оцінимо суму S :

$$16,66 < S < 16,78, \text{ або } S=16,72\pm0,06.$$

Правильними є перші три цифри. Отже, $S=16,7$.

3. Знайти периметр і площу прямокутника, знаючи межі, в яких знаходяться довжини його сторін у сантиметрах:

$$5,3 < x < 5,5;$$

$$3,6 < y < 3,8.$$

Розв'язання.

Насамперед маємо нерівність: $8,9 < x+y < 9,3$, звідки $17,8 < 2(x+y) < 18,6$.

Таким чином, $P = 18,2 \pm 0,4$ (см).

Оскільки межа абсолютної похибки дорівнює 0,4, то результат можна округлити до цілих: $P = 18$ см.

Обчислимо площу $S = xy$.

$$5,3 < x < 5,5$$

$$3,6 < y < 3,8$$

$$19,08 < xy < 20,90;$$

$$19 < S < 21;$$

$$S = 20 \pm 1 \text{ см}^2.$$

Правильними є цифри 2 і 0; $S = 20 \text{ см}^2$.

4. Визначити густину речовини, якщо в результаті вимірювань дістали:

$$\text{маса тіла } m = 195,0 \pm 0,5 \text{ г};$$

$$\text{об'єм тіла } V = 25,0 \pm 0,5 \text{ см}^3.$$

Розв'язання.

Обчислимо верхню та нижню межі, у яких знаходиться маса й об'єм тіла, скориставшись формулою $\rho = m/V$:

$$\begin{array}{l} 194,5\text{г} < m < 195,5\text{г} \\ 24,5\text{см}^3 < V < 25,5\text{см}^3 \\ \hline 194,5\text{г}/25,5\text{см}^3 < m/V < 195,5\text{г}/24,5\text{см}^3 \end{array}$$

Отже, $7,627\dots\text{г}/\text{см}^3 < \rho < 7,979\dots\text{г}/\text{см}^3$.

Округлимо нижню межу з недостатчею, а верхню — з надлишком:

$$7,62\text{г}/\text{см}^3 < \rho < 7,98\text{г}/\text{см}^3.$$

Знаходимо наближене значення густини і межу абсолютної похибки:

$$(7,62 + 7,98)/2 = 7,80(\text{г}/\text{см}^3);$$

$$(7,62 - 7,98)/2 = 0,18(\text{г}/\text{см}^3); \rho = 7,80 \pm 0,18\text{г}/\text{см}^3.$$

У числі 7,80 правильною є лише цифра 7. Округлимо це число до десятих, залишивши сумнівну цифру $\rho = 7,8\text{г}/\text{см}^3$.

МЕТОД МЕЖ ПОХИБОК. ПОХИБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ДІЙ

При обчисленнях із строгим врахуванням похибок замість того, щоб указувати нижню і

верхню межі, застосовують інший спосіб, який також дає цілком певні вказівки про точність наближених результатів, але дещо зручніший на практиці.

Нехай, наприклад, встановлено, що $25 < x < 29$, тобто що число x лежить між $25(НМx)$ і $29(ВМx)$. Беремо півсуму цих меж, тобто число $0,5(25+29)=27$, і вважаємо це число наближеним значенням x .

Записуємо:

$$a = (ВМ + НМ) / 2 = 27$$

Далі помічаємо, що для знаходження $НМx$ треба від 27 відняти 2, а для знаходження $ВМx$ треба до 27 додати 2. Таке число, віднімання якого від наближеного значення a невідомого числа x дає $НМx$, а додавання його до цього ж

наближеного значення x дає $ВМx$, буде межею абсолютної похибки даного наближеного значення a . Отже,

$$h_a = (ВМ - НМ) / 2.$$

У розглянутому щойно прикладі ми мали наближене значення x , що дорівнює 27, і межу його абсолютної похибки, яка дорівнює 2. Отже, $x = 27 \pm 2$, тобто x наближено дорівнює 27 з похибкою в той чи інший бік, яка не перевищує 2.

Таким чином, знаючи НМ і ВМ якоїсь величини, легко знайти наближене значення цієї величини і межу її абсолютної похибки: треба взяти півсуму обох меж і їх піврізницю; півсума береться за наближене значення величини x , а піврізниця є межею абсолютної похибки цього

наближеного значення. Наприклад, якщо $НМx=29,7$ і $ВМx=30,1$, то знаходимо:

$$(30,1+29,7):2=59,8:2=29,9, \text{ і}$$

$$(30,1-29,7):2=0,4:2=0,2.$$

Методом меж похибок користуються для оцінювання точності результатів дій з наближеними значеннями величин, спираючись на подані далі теореми.

Теорема 1. *Межа абсолютної похибки суми наближених значень величин дорівнює сумі меж абсолютних похибок доданків.*

Дано: $x=a\pm h_a$; $y=b\pm h_b$

Довести: $h_{(a+b)}=h_a+h_b$.

Доведення. За означенням межі абсолютної похибки маємо:

$$|x-a|\leq h_a, \text{ або } a-h_a\leq x\leq a+h_a; \quad (1)$$

$$|y-b| \leq h_b, \text{ або } b-h_b \leq y \leq b+h_b; \quad (2)$$

Додамо почленно нерівності (1) та

(2):

$$(a+b)-(h_a+h_b) \leq x+y \leq (a+b)+(h_a+h_b)$$

$$\text{або } |(x+y)-(a+b)| \leq h_a+h_b. \quad (3)$$

За означенням межі абсолютної похибки суми маємо:

$$|(x+y)-(a+b)| \leq h_{(a+b)}. \quad (4)$$

Порівнявши нерівності (3) і (4), дістанемо:

$$h_{(a+b)} = h_a + h_b.$$

Ця теорема справджується і для декількох доданків:

$$h_{(a+b+c+d)} = h_a + h_b + h_c + h_d.$$

Виходячи з означення відносної похибки та її межі маємо:

$$\varepsilon_{(a+b)} = h_{(a+b)} / |a+b| = (h_a + h_b) / |a+b|.$$

Приклади

1. Знайти опір трьох послідовно ввімкнених ламп з опорами, що дорівнюють:

$$R_1=40\pm0,3\text{Ом}, R_2=100\pm0,6\text{Ом}, R_3=25\pm0,2\text{Ом}.$$

Розв'язання. $h_R=h_{R_1}+h_{R_2}+h_{R_3}=1\text{Ом}$, звідки $R=165\pm1\text{Ом}$.

Правильними є усі цифри числа.

2. Знайти $S=x+y+z$, якщо: $x=9,6\pm0,1$, $y=2,45\pm0,05$, $z=3,836\pm0,001$. Обчислити відносну похибку результату.

Розв'язання. $S=15,886\pm0,151$, причому правильними є перші дві цифри. Результат округлюємо до цілих: $S\approx16$. Щодо межі відносної похибки маємо:

$$\varepsilon=0.151/15.886=0.0095\dots\approx0.01.$$

Отже, можна вважати, що межа відносної похибки $\varepsilon=1\%$.

3. Обчислити суму $x=\sqrt{5}+\sqrt{11}$ взявши наближені значення коренів з точністю до 0,001. Знайти відносну похибку результату. Відповідь записати правильними цифрами.

Розв'язання. $\sqrt{5}=2,23606...\approx 2,236$; $\sqrt{5}=2,236\pm 0,001$;
 $\sqrt{11}=3,31662...\approx 3,317$; $\sqrt{11}=3,317\pm 0,001$; $x=5,553\pm 0,002$ або
 $x=5,55$.

$$\varepsilon=0,002/5,553=0,00036...\approx 0,0004, \text{ тобто } \varepsilon=0,04\%.$$

Теорема 2. *Межа абсолютної похибки різниці наближених значень дорівнює сумі меж абсолютних похибок зменшуваного і від'ємника.*

Дано: $x=a\pm h_a$; $y=b\pm h_b$.

Довести: $h_{(a-b)}=h_a+h_b$.

Доведення. За означенням межі абсолютної похибки маємо:

$$|x-a|\leq h_a, \text{ або } a-h_a\leq x\leq a+h_a; \quad (5)$$

$$|y-b|\leq h_b, \text{ або } b-h_b\leq y\leq b+h_b;$$

Оцінюємо $(-y)$:

$$-b-h_b\leq -y\leq -b+h_b. \quad (6)$$

Додамо почленно нерівності (5) та (6):

$$(a-b)-(h_a+h_b)\leq x-y\leq (a-b)+(h_a+h_b),$$

$$\text{або } |(x-y)-(a-b)| \leq h_a + h_b. \quad (7)$$

За означенням межі абсолютної похибки різниці, маємо:

$$|(x-y)-(a-b)| \leq h_{(a-b)}. \quad (8)$$

Порівнявши нерівності (7) і (8), дістанемо:

$$h_{(a-b)} = h_a + h_b.$$

А за означенням межі відносної похибки маємо:

$$\varepsilon_{(a-b)} = (h_a + h_b) / |a - b|.$$

Таким чином, з першої та другої теорем випливає, що межа абсолютної похибки суми та різниці дорівнює сумі меж абсолютних похибок вихідних даних.

Приклад

Обчислити різницю $x = \sqrt{13} - \sqrt{5}$ з чотирма значущими цифрами. Знайти відносну похибку обчислення.

Розв'язання. $\sqrt{13}=\overline{3,60555}\dots\approx 3,606$; $\sqrt{13}=\overline{3,606}\pm 0,001$; $\sqrt{5}=\overline{2,23606}\dots\approx 2,236$; $\sqrt{5}=\overline{2,236}\pm 0,001$; $\sqrt{13}-\sqrt{5}=\overline{1,370}\pm \pm 0,002$;
 $\varepsilon_{(a-b)}=0.002/1,370\approx 0,0015$, $\varepsilon=0,15\%$.

Теорема 3. *Межа відносної похибки добутку двох наближених значень дорівнює сумі меж відносних похибок множників.*

Дано: $x=a\pm h_a$; $y=b\pm h_b$ де $a>0$, $b>0$.

Довести: $\varepsilon_{ab}=\varepsilon_a+\varepsilon_b$.

Доведення. За умовою та означенням межі абсолютної похибки маємо:

$$|x-a|\leq h_a, \text{ або } a-h_a\leq x\leq a+h_a,$$

$$|y-b|\leq h_b, \text{ або } b-h_b\leq y\leq b+h_b;$$

Скориставшись теоремою про почленне множення правильних числових нерівностей з додатними членами, дістанемо:

$$ab-ah_b-bh_a+h_a h_b\leq xy\leq ab+ah_b+bh_a+h_a h_b.$$

Оскільки числа h_a та h_b досить малі порівняно з a та b , то їх добутком можна знехтувати:

$$ab - (ah_b + bh_a) \leq xy \leq ab + (ah_b + bh_a),$$

$$\text{або } |xy - ab| \leq ah_b + bh_a \quad (9)$$

За означенням межі абсолютної похибки добутку маємо:

$$|xy - ab| \leq h_{ab} \quad (10)$$

З нерівностей (9) і (10) випливає:

$$h_{ab} = ah_b + bh_a.$$

Поділимо обидві частини останньої нерівності на $|ab|$:

$$h_{ab}/|ab| = ah_b/|ab| + bh_a/|ab| = h_b/|b| + h_a/|a|$$

Отже, $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$.

Таким чином, ми знайшли межі абсолютної та відносної похибок добутку:

$$h_{ab} = ah_b + bh_a$$

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b.$$

Наслідок. Якщо $y=a^2$, то

$$h_a^2 = 2ah_a; \varepsilon_a^2 = 2h_a/|a|.$$

Приклади

1. Округлити числа $x=3,245$; $y=5,364$ до десятих та знайти їх добуток. Обчислити межі абсолютної та відносної похибок результату.

Розв'язання. $x \approx a = 3,2$; $y \approx b = 5,4$; $x = 3,2 \pm 0,1$; $y = 5,4 \pm 0,1$;

$xy = 3,2 \cdot 5,4 \pm h_{ab}$; $h_{ab} = 3,2 \cdot 0,1 + 5,4 \cdot 0,1 \approx 0,9$, $xy = 17,3 \pm 0,9$;

$$\varepsilon_{ab} = 0,9/17,3 = 0,05202, \varepsilon_{ab} = 5,3\%.$$

Відповідь. $xy = 17,3$, $h_{ab} = 0,9$, $\varepsilon_{ab} = 5,3\%$.

2. Обчислити добуток чисел $x=0,34 \pm 0,005$, $y=0,64 \pm 0,01$. У відповіді залишити лише правильні цифри.

Розв'язання. $xy = 0,34 \cdot 0,64 \pm h_{ab}$; $h_{ab} = 0,34 \cdot 0,01 + 0,64 \cdot 0,005 = 0,0066 \approx 0,007$. $xy = 0,218 \pm 0,007$.

Правильними є лише перші дві цифри. Округливши, дістанемо: $xy = 0,22 \pm 0,007$ або $xy = 0,22 \pm 0,01$.

3. Обчислити площу круга, якщо $R = 2,35 \pm 0,01$ см. Відповідь Записати лише правильними цифрами.

Розв'язання. $S=\pi R^2\pm h_{\pi R}^2$. Візьмемо значення $\pi=3,14\pm 0,01$. За теоремою про межу абсолютної похибки добутку та наслідком з неї запишемо формулу для обчислення межі абсолютної похибки: $h_{\pi R}^2=\pi h_R^2+R^2 h_{\pi}^2$; $h_R^2=2R h_R$, звідки $h_{\pi R}^2=2\pi R h_R+R^2 h_{\pi}^2$.

Виконаємо обчислення:

$$h_{\pi R}^2=2\cdot 3,14\cdot 2,35\cdot 0,01+2,35^2\cdot 0,01=0,147\dots+0,055\dots=0,202\dots\approx 0,21.$$

Отже, $S=17,34\pm 0,21(\text{см}^2)$. Правильними є лише цифри 1; 7,

Відповідь. $S=17\text{см}^2$.

Теорема 4. *Межа відносної похибки частки дорівнює сумі меж відносних похибок діленого й дільника.*

Дано: $x=a\pm h_a$; $y=b\pm h_b$ де x , y , a , b – додатні числа.

Довести: $\varepsilon_{a/b}=\varepsilon_a+\varepsilon_b$.

Доведення. За умовою та означенням межі абсолютної похибки маємо:

$$|x-a|\leq h_a, \text{ або } a-h_a\leq x\leq a+h_a,$$

$$|y-b|\leq h_b, \text{ або } b-h_b\leq y\leq b+h_b;$$

Оцінюємо $1/y$:

$$1/(b-h_b) \geq 1/y \geq (b+h_b).$$

Далі, скориставшись теоремою про почленне множення числових нерівностей з додатними членами, оцінюємо добуток $x \cdot (1/y)$:

$$(a-h_a)/(b+h_b) \leq x \cdot (1/y) \leq (a+h_a)/(b-h_b)$$

До всіх членів нерівності додамо вираз $(-a/b)$:

$$(a-h_a)/(b+h_b) - a/b \leq x/y - a/b \leq (a+h_a)/(b-h_b) - a/b$$

Тоді, виконавши тотожні перетворення, дістанемо:

$$-(bh_a + ah_b)/b(b+h_b) \leq x/y - a/b \leq (bh_a + ah_b)/b(b-h_b).$$

Оскільки величина h_a досить мала порівняно з a та b , то, знехтувавши нею в знаменнику, дістанемо:

$$|x/y - a/b| \leq (bh_a + ah_b)/b^2, \text{ тобто } h_{a/b} = (bh_a + ah_b)/b^2.$$

Поділимо почленно на $|a/b|$ обидві частини останньої рівності:

$$h_{a/b}/|a/b|=h_a/|a|+h_b/|b|, \varepsilon_{a/b}=\varepsilon_a+\varepsilon_b.$$

Приклад

У книжці повинно бути 638500 ± 100 знаків. Скільки сторінок буде в цій книжці, якщо на сторінці вміщується 1750 ± 10 знаків?

Розв'язання. Позначимо шукану кількість сторінок через n , $a=638500$; $b=1750$; $n=a/b \pm h_{a/b}$.

Маємо:

$$a/b=638500/1750=364,85\dots \approx 364,9.$$

$$h_{a/b}=(638500 \cdot 10 + 1750 \cdot 100)/1750^2=2,14\dots; n=364,9 \pm 2,2.$$

Відповідь. $n=365$.

МЕТОД ПІДРАХУНКУ ЦИФР

Установлюючи межі невідомого точного значення шуканої величини, ми, як кажуть, виконуємо обчислення із *строгим врахуванням похибок*. Проте часто на практиці нас

задовольняють результати обчислень, виконаних без *строгого врахування похибок*, але із застосуванням так званого *методу підрахунку цифр*.

В основі його лежить правило запису наближених значень чисел за допомогою самих лише правильних цифр та однієї сумнівної.

Додавання й віднімання наближених значень чисел

Нехай потрібно знайти суму наближених значень чисел $x=4,51$ та $y=6,213$, заданих правильними цифрами. Наближене значення суми $x+y$ є число 10,723.

З'ясуємо, які цифри результату правильні, скористаємось методом меж похибок.

Оскільки $x=4,51\pm0,01$ і $y=6,213\pm0,001$, то $x+y=10,723\pm0,011$, тобто правильними є лише перші три цифри числа.

Залишивши в результаті всі правильні цифри та одну сумнівну, дістанемо $x+y=10,72$. У сумі маємо два десяткові знаки, тобто стільки ж, скільки їх має доданок з меншою кількістю цифр (4,51).

Розглянемо ще один приклад.

Нехай потрібно знайти суму трьох чисел, записаних за допомогою лише правильних цифр: 125,3; 2,326; 0,2576, записавши результат тільки правильними цифрами та однією сумівною.

Позначимо: $x=125,3\pm0,1$; $y=2,326\pm0,001$; $z=0,2578\pm0,0001$.

Тоді шукана сума $S=127,8836\pm0,1011$. Правильними є цифри 1, 2, 7. Округлимо суму до

сумнівної цифри $S=127,9$. У результаті дістали стільки десяткових знаків, скільки їх має доданок з найменшою кількістю десяткових знаків (125,3).

Отже, маємо правило:

У сумі наближених значень чисел, усі цифри яких правильні, залишають стільки десяткових знаків, скільки їх має найменш точний доданок, тобто доданок з найменшою кількістю десяткових знаків.

Примітка. Якщо знайдений результат є проміжним, то в ньому слід зберегти один запасний десятковий знак.

Наприклад, якщо потрібно знайти суму $S=x+y+z$ наближених значень чисел $x=3,1416$; $y=2,718$ і $z=7,4$, усі цифри яких правильні, то, округлюючи результат, залишаємо в ньому стільки десяткових знаків, скільки їх у виділеному доданку, тобто округлюємо до сотих: 13,26.

Аналогічне правило застосовне й до дії віднімання. Знайдемо, наприклад, різницю чисел

$x \approx 5,25$ і $y \approx 2,7184$ у запису яких усі цифри правильні. Маємо: $x = 5,25 \pm 0,01$; $y = 2,7184 \pm 0,0001$, звідки $x - y = 2,5316 \pm 0,0101$ (межі абсолютних похибок додаються).

У результаті залишаємо правильні цифри і одну сумнівну $x - y = 2,53$ (результат має два десяткових знаки, як і число з найменшою кількістю десяткових знаків (5,25)).

Отже, у різниці наближених значень чисел залишають стільки десяткових, знаків, скільки їх має найменш точне дане, тобто число з найменшою кількістю десяткових, знаків.

Зокрема, при додаванні цілих чисел, заданих з різною точністю, записують їх в стандартному вигляді, а потім застосовують сформульоване вище правило. Наприклад:

$$\begin{aligned}
 S &= 5440 + 1600 + 7000 + 6166; \\
 S &= 5,44 \cdot 10^3 + 1,6 \cdot 10^3 + 7,0 \cdot 10^3 + 6,166 \cdot 10^3 = \\
 &= 10^3(5,44 + 1,6 + 7,0 + 6,166) = \\
 &= 20,206 \cdot 10^3 \approx 20,2 \cdot 10^3 = 2,02 \cdot 10^4.
 \end{aligned}$$

Множення й ділення наближених значень чисел

При додаванні і відніманні наближених чисел ми з'ясовуємо, скільки десяткових знаків має кожне наближене дане, і зберігаємо в результаті стільки десяткових знаків, скільки їх має найменш точне дане, причому менш точним даним вважається те, у якому менше десяткових знаків. При множенні ж число десяткових знаків неістотне, бо при зміні положення коми в множеному (або в множнику, або в обох разом) в добутку змінюється лише положення коми, цифровий же склад добутку залишається

незмінним. Те правило, яке ми дістали для визначення числа правильних цифр у сумі й різниці, для добутку, очевидно, зовсім не придатне.

Тому розглянемо це питання докладніше.

Нехай у нас є прямокутник, сторони якого наближено дорівнюють 45,6 і 21,8см; треба знайти його площу.

Як відомо, для цього потрібно перемножити числа, що виражають довжини сторін. Виконавши множення, дістаємо число $994,08\text{см}^2$. Які ж цифри цього добутку правильні, а які неправильні і, отже, мають бути відкинуті?

Розглянемо множення двох даних наближених множників, поставивши знак питання замість невідомої цифри сотих частин у кожному:

$$\begin{array}{r} 45,6? \\ \times 21,8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 21,8? \\
 \hline
 ???? \\
 3648? \\
 456? \\
 \hline
 912? \\
 \hline
 994,08??
 \end{array}$$

У результаті множення множеного 45,6? на невідому цифру множника (?) дістаємо перший частинний добуток, що містить або 4, або 5 цифр. Наприклад, при множенні на 2 дістали б чотирицифрове число (91,2?), при множенні на 5 — уже п'ятицифрове (228,0?). Проте п'ята з кінця цифра, якщо вона є, не може бути дуже великою. Саме тому цю п'яту цифру позначено маленьким знаком питання.

Розглядаючи, як виникла кожна цифра остаточного добутку, бачимо, що дві перші його цифри напевне правильні, третя ж, що походить від додавання маленького знака питання до цифр

6, 5, 2, вже дещо сумнівна, тим більше, що в неї мають перейти десятки, які дістаємо при додаванні цифр найближчого справа стовпчика. Четверта і п'ята цифри добутку (0 і 8) вже зовсім ненадійні. Звідси робимо висновок, що в добутку слід зберегти три перші цифри, останні ж треба відкинути. Таким чином, шукана площа прямокутника наближено дорівнює 994см^2 . Тут, перемножуючи два наближені числа з трьома значущими цифрами кожне, ми дістали добуток теж з трьома значущими цифрами.

У розглянутому прикладі два трицифрові числа дали в добутку (до його округлення) число п'ятицифрове. Проте частіше буває, що добуток двох трицифрових чисел є число шестицифрове. Наприклад, помноживши 95,6 на 21,8, дістанемо в добутку 2084,08. Тут уже три перші цифри

добутку правильні, четверта і наступні неправильні, у чому легко переконатися, розглядаючи походження кожної цифри остаточного добутку:

$$\begin{array}{r}
 95,6? \\
 \underline{21,8?} \\
 ??? ?? \\
 7648 ? \\
 956? \\
 \underline{1912?} \\
 2084,08??
 \end{array}$$

У першому частинному добутку або 4, або 5 значущих цифр, причому п'ята з кінця цифра може бути вже досить значною, тому ми зображуємо її вже не маленьким знаком питання, як у попередньому прикладі, а великим. Як бачимо, у результаті дістали знову три правильні значущі цифри.

Отже, у добутку маємо число 2080

Розв'язування прикладів на множення та ділення дає можливість сформулювати таке правило: *при множенні й діленні наближених значень чисел у результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має наближене число з найменшою кількістю правильних значущих цифр.*

Користуючись правилом множення й ділення наближених значень чисел, можна вивести правила для піднесення до степеня та добування кореня.

При піднесенні до квадрата й куба наближених значень чисел у результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має число, яке підноситься до степеня.

$$8,42^2=70,8964\approx 70,9; 1,3^3=2,197\approx 2,2.$$

При добуванні квадратного й кубічного кореня в результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має підкореневе число.

$$\sqrt{0,0085}=0,0921\dots\approx 0,092; \sqrt[3]{4,82}=1,689\dots\approx 1,69.$$

Розділ II.

НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ В КУРСІ ФІЗИКИ

Лабораторні роботи з фізики

Визначення густини рідини.

Розрахункова формула $\rho=m/V$.

Нехай об'єм рідини визначили з точністю до 1см^3 (наприклад, мензуркою з відповідною ціною поділки), а її масу — з точністю до 0,5г, причому

$$V=15\pm 1\text{см}^3;$$

$$m=19\pm0,5\text{г.}$$

Перший спосіб. Виконуємо обчислення за методом меж:

$$18,5\text{г}<m<19,5\text{г};$$

$$14\text{см}^3<V<16\text{см}^3.$$

За правилами знаходження верхньої та нижньої меж частки записуємо:

$$13.5\text{г}/16\text{см}^3<\rho<19.5\text{г}/14\text{см}^3$$

Обчислюючи, за правилами отримуємо
 $\rho=1,275\pm0,119\text{г}/\text{см}^3.$

Густину, близьку до знайденої, має гліцерин $\rho=1,26\text{г}/\text{см}^3$. Знаходимо відносну похибку вимірювання за формулою:

$$\omega = \frac{|x-a|}{|a|} = 1,2\%$$

Відповідь. $\rho=1,275\pm0,119\text{г/см}^3$, $\omega=1,2\%$.

Другий спосіб. Виконуємо обчислення за методом меж похибок.

Маємо:

$$\rho=m/V\pm h_{m/V};$$

$$\rho=19/15\pm(19\cdot1+15\cdot0,5)/15^2=1,267\pm0,118\text{г/см}^3;$$

$$\frac{|x-a|}{|a|}$$

$$\omega=|1,267-1,26|/1,26=0,006=0,6\%$$

Відповідь. Густина вимірюваної рідини — гліцерину, обчислена за методом меж, становить $\rho=1,275\pm0,119\text{г/см}^3$, а за методом меж похибок — $\rho=1,267\pm0,118\text{г/см}^3$.

У першому випадку похибка результату порівняно з табличними даними, становить $\omega=1,2\%$, а в другому $\omega=0,6\%$.

Визначення густини тіла, що має форму бруса.

Розрахункові формули:

$$\rho=m/V; V=abc; \rho=m/abc.$$

Нехай, виконавши відповідні вимірювання й зважування, знайшли:

$$a=6,4\pm0,1\text{ см}, b=2,3\pm0,1\text{ см}, c=1,6\pm0,1\text{ см},$$

$$m=209,22\pm0,01\text{ г}.$$

Перший спосіб. Обчислюємо густину за методом меж:

$$6,3 < a < 6,5,$$

$$2,2 < b < 2,4,$$

$$1,5 < c < 1,7$$

$$1,5 \cdot 6,3 \cdot 2,2 < V < 6,5 \cdot 2,4 \cdot 1,7$$

$$209,21 < m < 209,23$$

За правилами знаходження меж добутку та частки записуємо:

$$209,21/(6,5 \cdot 2,4 \cdot 1,7) < m/V < 209,23/(1,5 \cdot 6,3 \cdot 2,2)$$

Обчислюємо за правилами:

Отже, $\rho=8,976\pm1,088\text{г/см}^3$.

Другий спосіб. Виконуючи обчислення за методом меж похибок, маємо:

$$V=abc\pm h_{abc}.$$

Оскільки

$$h_{abc}=|bc|h_a+|ac|h_b+|ab|h_c,$$

то

$$V=6,4\cdot2,3\cdot1,6\pm(2,3\cdot1,6\cdot0,1+6,4\cdot1,6\cdot0,1+6,4\cdot2,3\cdot0,1).$$

Отже, $V=23,6\pm2,9\text{см}^3$.

Оскільки

$$\rho=m/V\pm h_{m/V}; h_{m/V}=(mhV+Vhm)/V^2,$$

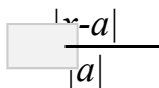
то

$$\rho=209,22/23,6\pm(209,22\cdot2,9+23,6\cdot0,01)/23,6^2.$$

Отже, $\rho=8,865\pm1,072\text{г/см}^3$.

Густина, близьку до знайденої, має мідь:
 $\rho=8,9\text{г/см}^3$.

Відносну похибку вимірювання та обчислення знаходимо, за формулою



$$\frac{|x-a|}{|a|}$$

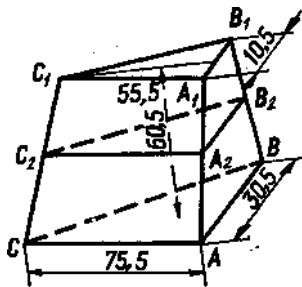
$$\omega_1 \approx 0,0086; \omega_2 \approx 0,0039.$$

Відповідь. Тіло виготовлено з міді. У першому випадку похибка результату порівняно з табличними даними, становить 0,9%, а в другому—0,4%.

Визначення густини тіла, що має форму клина.

Відомо, що маса клина становить близько 112,5кг. Основами його є прямокутні трикутники із взаємно паралельними катетами; катети одного

приблизно 75,5см і 30,5см, другого — 55,5см і 10,5см, висота клина 60,5см (мал. 5).



Нехай площина трикутника ABC паралельна площині $A_1B_1C_1$, причому $AB \parallel A_1B_1$; $AC \parallel A_1C_1$.

Розрахункові формули:

Мал. 5

$$\rho = m/V$$

$$V \approx H/6(S_H + 4S_C + S_B)$$

де S_H — площа нижньої основи; S_B — площа верхньої основи; S_C — площа серединного перерізу. Згідно з умовою маємо:

$$AC = 75,5 \pm 0,1 \text{ см};$$

$$AB = 30,5 \pm 0,1 \text{ см};$$

$$A_1C_1 = 55,5 \pm 0,1 \text{ см};$$

$$A_1B_1 = 10,5 \pm 0,1 \text{ см};$$

$$H=60,5\pm0,1\text{ см};$$

$$m=112,5\pm0,1\text{ кг}=112500\pm100\text{ г}.$$

Обчислення виконуємо за методом меж похибок:

$$S_H=0,5(AB\cdot AC\pm h)=0,5(30,5\cdot 75,5\pm h);$$

$$h=30,5\cdot 0,1+75,5\cdot 0,1; S_H=1151\pm 6\text{ см}^2.$$

$$S_B=0,5(A_1B_1\cdot A_1C_1\pm h)0,5(10,5\cdot 55\pm h);$$

$$h=10,5\cdot 0,1+55,5\cdot 0,1; S_B=291\pm 4\text{ см}^2.$$

$\angle A_2=\angle A=90^\circ$ як кути із взаємно паралельними сторонами, причому

$$A_2B_2=0,5(AB+A_1B_1)=0,5(41\pm 0,2)=20,5\pm 0,1$$

$$A_2C_2=0,5(131\pm 0,2)=65,5\pm 0,1.$$

Далі маємо:

$$S_c=0,5(20,5\cdot 65,5\pm h); h=20,5\cdot 0,1+65,5\cdot 0,1;$$

Звідки

$$S_c=671\pm5(\text{см}^2).$$

Оскільки

$$S_H+4S_C+S_B=(1151+2684+291)\pm(6+20+4)=4126\pm30(\text{см}^2),$$

то

$$V=1/6(60,5\cdot4126\pm h); h=4126\cdot0,1+60,5\cdot30.$$

$$\text{Отже, } V=41603,8\pm614(\text{см}^3).$$

Запишемо відповідь правильними цифрами, вважаючи, що вихідні дані записані лише правильними цифрами. Правильними є лише перші дві цифри. Округлюємо наближене значення до сумнівної цифри: $V=416\cdot10^2=4,16\cdot10^4(\text{см}^3)$.

Маємо:

$$\rho=m/V\pm h_{m/V},$$

де

$$h_{m/V}=(mh_V+Vh_m)/V^2,$$

Отже,

$$\rho = 1,125 \cdot 10^5 / 4,16 \cdot 10^4 \pm \\ \pm (1,125 \cdot 10^5 \cdot 614 + 4,16 \cdot 10^4 \cdot 10^2) / 4,16^2 \cdot 10^8.$$

Обчислюємо за правилами і отримуємо:

$$\rho = 2,7042619 \pm 0,042318671 = 2,7 \pm 0,1 \text{ г/см}^3.$$

Знаходимо відносну похибку обчислення:

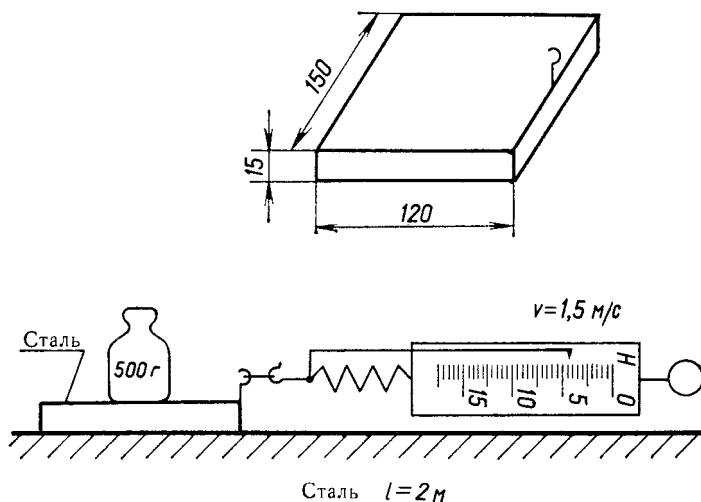
$$\omega = 0,00212 \approx 0,3\%.$$

Відповідь. Кли́н виготовлено з алюмінію; відносна похибка становить $\omega = 0,3\%$. Гу́стину, близьку до знайденої, має алюміній: $\rho = 2,71 \text{ г/см}^3$.

Визначення коефіцієнта тертя ковзання при рівномірному русі.

Розрахункова формула

$$\mu = F_{\text{тр}} / N, \quad F_{\text{тр}} = F_{\text{тяги}}$$



Мал. 6

($F_{\text{тяги}}$ знаходимо за показами динамометра).
 $N = F_{\text{тяж}}$; $F_{\text{тяж}} = (m + m_1)g$, де m — маса гирі,
 $m_1 = \rho abh$ — маса підставки із сталі (мал. 6). Отже,

$$\mu = F_{\text{тяги}} / (m + \rho abh)g.$$

Запишемо вихідні дані (з недостатчею і надлишком):

$$0,149\text{м} < a < 0,151\text{м};$$

$$0,119\text{м} < b < 0,121\text{м};$$

$$0,014\text{м} < h < 0,016\text{м};$$

$$0,499\text{кг} < m < 0,501\text{кг};$$

$$7799\text{кг/м}^3 < \rho < 7801\text{кг/м}^3;$$

$$9,7\text{м/с}^2 < g < 9,9\text{м/с}^2;$$

$$4,4\text{Н} < F_{\text{тяги}} < 4,6\text{Н}.$$

За правилами обчислення верхньої та нижньої меж суми, добутку й частки знаходимо:

$$4,4/(0,501+7801 \cdot 0,151 \cdot 0,121 \cdot 0,016) \cdot 9,9 \text{ — } \text{НMF}_{\text{тяги}};$$

$$4,6/(0,499+7799 \cdot 0,149 \cdot 0,119 \cdot 0,014) \cdot 9,7 \text{ — } \text{ВМF}_{\text{тяги}}.$$

Обчислюємо за правилами і отримуємо:

$$\mu = 0,17727065 \pm 0,017485525 \approx 0,18 \pm 0,02,$$

$$\omega = 0,09863745 \approx 0,099 = 9,9\%$$

Відповідь. $\mu = 0,18 \pm 0,2$; $\omega = 9,9\%$.

Список використаної літератури:

1. Брадис В.М. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 220с.
2. Демидович В.П., Прайсман Н.Я. Приближённые вычисления в курсе физики. – М.: Просвещение, 1983. – 106с.
3. Жалдак М.І., Рамський Ю.С. Чисельні методи математики. – К.: Рад.шк., 1984. – 200с.
4. Минаева С.С. Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике. – М.: Просвещение, 1983. – 126с.
5. Пулькин С.П. Вычислительная математика: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1974. – 233с.
6. Скрябин Л.И. Дидактический материал по физике: 8 класс: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1984. – 140с.
7. Литовченко З.М., Елизаветина Н.В. Приближённые вычисления: Пособие для учителя. – К.: Рад.шк., 1988. – 125с.

ЗМІСТ

Передмова.....	3
<i>Розділ I. Теоретичні основи наближених обчислень.....</i>	4
Наближені значення величин.....	4
Похибки наближених значень величин.....	7
Абсолютна похибка. Межа абсолютної похибки.....	7
Відносна похибка. Межа відносної похибки.....	16
Наближені обчислення за методом меж.....	25
Метод меж похибок. Похибка результатів дій.....	34
Метод підрахунку цифр.....	45
Додавання й віднімання наближених значень чисел.....	46
Множення й ділення наближених значень чисел.....	49

<i>Розділ II</i>	Застосування наближених обчислень на лабораторних з	
	фізики.....	
		55
Лабораторні	роботи	з
фізики.....		55
Список	використаної	
літератури.....		66