

Travaux dirigés de mécanique du point

Série II

EXERCICE 1 :

On donne trois vecteurs $\vec{A}(3, 2\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\vec{B}(2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ et $\vec{C}(1, 2, 2)$.

1. Calculer les normes $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{B}\|$ et $\|\vec{C}\|$. En déduire les vecteurs unitaires $\vec{u}_A$, $\vec{u}_B$ et $\vec{u}_C$ des directions, respectivement, de $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.
2. Calculer $\cos(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B})$, $\cos(\widehat{\vec{u}_B, \vec{u}_C})$ et $\cos(\widehat{\vec{u}_C, \vec{u}_A})$, sachant que les angles sont compris entre 0 et π .
3. Calculer les composantes des vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{u}_B \wedge \vec{u}_C$, $\vec{e}_2 = \vec{u}_C \wedge \vec{u}_A$ et $\vec{e}_3 = \vec{u}_A \wedge \vec{u}_B$.
4. En déduire $\sin(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B})$, $\sin(\widehat{\vec{u}_B, \vec{u}_C})$ et $\sin(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_C})$. Vérifier ces résultats en utilisant la question 2.
5. Montrer que $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ peuvent constituer une base. Cette base est-elle orthogonale, normée ?

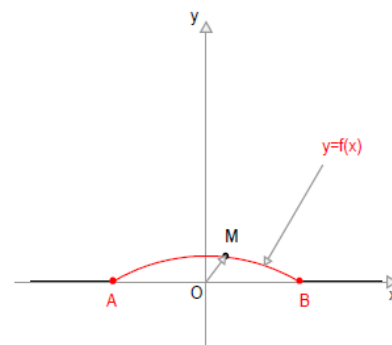
EXERCICE 2 :

Un véhicule, que l'on peut considérer comme un point matériel M , se déplace par rapport à un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ avec un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ telle que $|\vec{V}(M/\mathcal{R})| = v$. Le véhicule roule sur une bosse dont le profil peut être représenté par $y = f(x)$. On s'intéresse au segment de la route $[A, B]$.

1. Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ en fonction de $\dot{x}$ et de la dérivée première $f'(x) = df(x)/dx$ par rapport à x .
2. Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$. En déduire que la composante de l'accélération selon Oy peut se mettre sous la forme

$$\gamma_y(M/\mathcal{R}) = \frac{v^2 f''(x)}{(f'^2 + 1)^2}$$

$f''(x)$ étant la dérivée seconde de $f(x)$ par rapport à x .



Exercice 3 :

Considérons un repère cartésien $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ respectivement les bases cylindrique et sphérique. Soit M un point repéré par $\vec{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On considère un déplacement infinitésimal de M en M' tel que M' est très proche de M . On note alors le déplacement élémentaire par $\vec{OM}' - \vec{OM} = d\vec{MM}' = d\vec{OM}$

1. Dans le repère cartésien, $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Calculer le déplacement $d\vec{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$ dans la base cartésienne.
2. Rappeler le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$. Partant de $\vec{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$, calculer le déplacement $d\vec{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$ dans la base cylindrique.
3. Rappeler le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$. Dans la base sphérique $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, calculer le déplacement $d\vec{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$ et ce dans cette base.

Exercice 4 :

Considérons la position d'un point M dans le repère $\mathcal{R}(O, XYZ)$. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1. Calculer

$$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi}.$$

2. En déduire $d\vec{e}_\rho$ et $d\vec{e}_\varphi$ dans la base cartésienne.
3. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base cylindrique peuvent se mettre sous la forme

$$d\vec{e}_\rho = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho \quad \text{et} \quad d\vec{e}_\varphi = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi$$

en précisant l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ des vecteurs de la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$. Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique dans $\mathcal{R}$.

4. Quel est le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les expressions de

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}, \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\phi}{dt}.$$

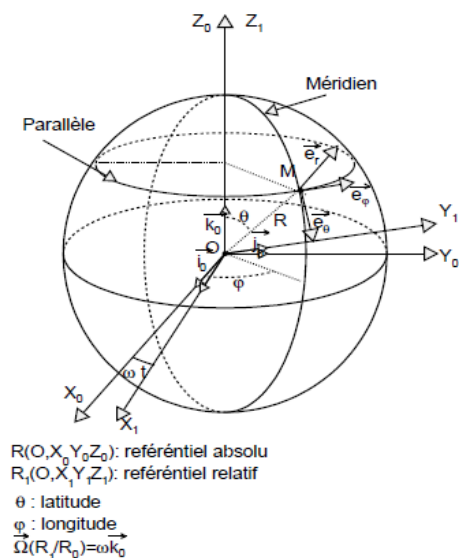
Exercice 4 :

On se propose dans cet exercice d'étudier le mouvement du vol d'un avion parcourant une ligne rejoignant deux villes se trouvant sur le même méridien. On suppose que l'avion effectue le vol à une hauteur h et à une longitude φ_0 et ce à une vitesse v constante par rapport à la surface terrestre.

Soit $\mathcal{R}_0(OX_0Y_0Z_0)$ le repère géocentrique et $\mathcal{R}_1(OX_1Y_1Z_1)$ le repère lié à la terre. L'avion est considéré comme un point matériel, que l'on notera M , repéré dans $\mathcal{R}_1$ par les angles θ et φ , voir figure ci-contre. Soit R le rayon du globe terrestre et ω sa vitesse angulaire de rotation.

Exprimer tous les résultats dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

1. Etablir l'expression de la vitesse de l'avion $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$. En déduire que $\dot{\theta}$ est constante.
2. Etablir l'expression de l'accélération de l'avion $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$.
3. Quel est le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$?
4. Etablir les expressions de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et de l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$.



Exercice 5 :

Les équations horaires du mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont données par

$$x(t) = be^{-kt}\cos(kt), \quad y(t) = be^{-kt}\sin(kt) \quad \text{et} \quad z(t) = 0.$$

1. a- Calculer les coordonnées polaires ρ et φ de M en fonction de t .
b- En déduire l'équation polaire de la trajectoire $\rho(\varphi)$.
2. a- Déterminer les composantes polaires du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ en fonction de t .
b- Calculer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OM}, \widehat{\vec{V}(M/\mathcal{R})})$. Conclure.
c- Quelle est la nature du mouvement ?
3. a- Déterminer les composantes polaires de l'accélération.
b- En déduire la direction et le sens de l'accélération.
4. a- Calculer les vecteurs unitaires de la base de Fresnet.
b- En déduire les composantes tangentielle et normale de l'accélération.
c- Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire au point M .